Differentialgleichungen.

S. 19 G. 04. S

bei

Geh. Rat Klein

"

G. Prange.

I

[illegible]

Diese Vorlesung über „Differentialgleichungen" bildet die Fortsetzung der Vorlesung des vorigen Winter-Semesters über „Differential- und Integralrechnung II".

Die Differentialrechnung ging davon aus, daß eine Funktion $y = f(x)$ gegeben war, und der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gesucht wurde. Umgekehrt war in der Integralrechnung der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gegeben, und man suchte die zugehörige Funktion $y = f(x)$.

Die Lehre von den Differentialgleichungen setzt voraus, daß eine Gleichung, etwa von der Art

$$\Omega\left(y, x, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

gegeben ist, und y wie $\frac{dy}{dx}$ als Funktionen von x gesucht werden.

Diese Differentialgleichungen sind äußerst wichtig. Sie haben ihre Ausbildung erlangt von

der physikalischen Seite her, denn unsere gesamte Naturerkenntnis, soweit sie physikalischer Art ist, beruht im wesentlichen auf dem Studium von Differentialgleichungen.

Der praktischen Seite folgte, wie gewöhnlich auch hier die Ausbildung von der theoretischen Seite nach; so daß ihre Bedeutung auch auf rein mathematischem Gebiete (Geometrie, Funktionentheorie) jetzt äußerst groß ist.

Den Differentialgleichungen gegenüber stehen die Integralgleichungen, etwa von der Art

$$\Omega\left(x, y, \int \varphi(x)\cdot y\cdot dx\right) = 0.$$

Der Titel der Vorlesung („Differentialgleichungen") soll nicht ausschließen, daß wir auch von solchen Integralgleichungen sprechen.

Was die Litteratur über die Lehre von den Differentialgleichungen angeht, so ist wohl das vollständigste Werk, das den Stoff seinem ganzen Umfange nach erschöpft, die

Encyclopaedie d. math. Wissensch.: Bd II,

die folgenden Autoren über den Gegenstand Referate erstattet haben:

Painlevé, Vessiot, v. Weber, Bôcher, Burkhardt-Meyer, Sommerfeld.

Zur Einleitung in das Studium ist natürlich dieses Nachschlagewerk aber nicht geeignet. Hier müssen die Lehrbücher zu Rate gezogen werden. Von den generellen Lehrbüchern behandeln auch die Differentialgleichungen eingehend Czuber (2 Bde) und Serret (3 Bde). Spezielle Lehrbücher der Differentialgleichungen sind verfaßt von Liebmann, der besonders die geometrischen Interpretationen der Differentialgleichungen bringt, von Schlesinger, der das Hauptgewicht auf die funktionentheoretische Seite legt, und von Riemann-Weber, der in seinen „partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik" hauptsächlich die Probleme der Physik behandelt.

4.)

Eine Einteilung der Differentialgleichungen können wir etwa nach folgenden Gesichtspunkten treffen: Wir betrachten

1.) die Zahl der Gleichungen selbst.

Wir haben entweder eine einzelne Gleichung

$$\Omega\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

oder ein System von Gleichungen (2 od. mehrere)

$$\Omega_1\left(y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, x\right) = 0$$

$$\Omega_2\left(y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, x\right) = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

2.) die Zahl der (abhängigen und unabhängigen) Variabeln.

Eine Gleichung von der Form

$$\Omega\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

nennen wir eine gewöhnliche Differentialgleichung, während eine Gleichung wie

$$\Omega\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, y, x\right) = 0$$

wegen der vorkommenden partiellen Differentialquotienten eine partielle Differentialgleichung genannt wird.

3) ~~Die Ordnung~~ Grad der vorkommenden Differentialquotienten.

Je nachdem ein erster, zweiter u.s.w. Differentialquotient vorkommt, unterscheiden wir Differentialgleichungen erster, zweiter u.s.w. Ordnung.

Nach diesen Erklärungen stellt die Gleichung

$$\Omega\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung vor. Von solchen Differentialgleichung wollen wir zunächst reden.

Lösen wir die gegebene Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Interpretieren wir diese Form geometrisch:

Wir grenzen uns ein Stück der (x,y) Ebene ab, in der Weise, daß darin keine singulären Stellen vorkommen, daß also $f(x,y)$ keine unbestimm-

an Stelle annimmt ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, u. s. w.) und dass die Funktion nicht mehrdeutig ist.
Unsere Gleichung sagt dann aus:

Jedem Punkte (x,y) in unserem Gebiete ist durch unsere Gleichung eine ganz bestimmte Richtung (ein „Vektor") zugeordnet. Es ist durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ein „Vektorfeld" bestimmt.
Wenn wir aus dieser Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

bestimmen wollen, so müssen wir die Differentialgleichung integrieren.

Diese Integration der Differentialgleichung bedeutet geometrisch, alle Kurven $y = \varphi(x)$ zu finden, in der Art, daß die Kurven in allen ihren Punkten von der zugehörigen Richtung tangiert wird.

Wir bekommen eine ganze Schar von Integralkurven, was auch dem entspricht, daß bei der Integration eine willkürliche Konstante auftritt

$$y = \underline{\varphi(x, C)}.$$

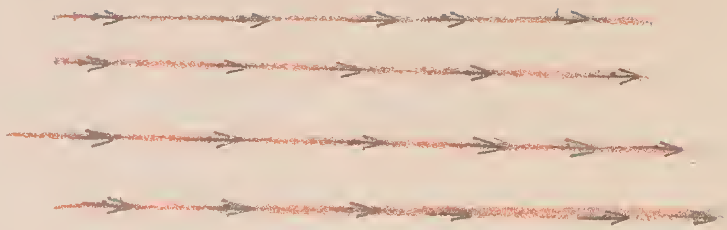
Diese immerhin noch etwas abstrakten Ausführungen, wollen wir uns an einigen Beispielen deutlich machen.

1. Beispiel:

Betrachten wir als erstes Beispiel die einfachste Differentialgleichung, die möglich ist, nämlich

$$y' = 0.$$

Geometrisch bedeutet dies, daß alle einzelnen Punkten (x, y) zugeordneten Richtungen horizontal sind.



Bei der ~~freien~~ Integrations-Kurven-Konstruktion werden wir einen ~~fer~~ Schar horizontaler Geraden haben. Dem entspricht, daß bei der Integration sich y gleich einer willkürlichen Konstanten $y = C$ ergiebt.

2. Beispiel:

Wir ziehen durch einen Punkt O verschiedene Geraden und ordnen auf den einzelnen Geraden jedem Punkte eine Richtung zu, die auf der betreffenden Geraden senkrecht steht.

Wenn wir die zugehörigen Integralkurven ziehen, so erhalten wir Kreise, deren Gleichungen lauten

$$x^2 + y^2 = C.$$

Wir haben damit die Gleichung der Integralkurven gefunden, ohne die Differentialgleichung selbst zu kennen. Wir finden sie durch Differentiation, es ergibt sich

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Wir werden allgemein sagen können:

Wenn man irgend eine Kurvenschar hat, in der eine willkürliche Konstante vorkommt, so wird man eine Differentialgleichung bilden können, in der die Konstante fortfällt.

Auch durch eine Hülfsvorstellung aus der Mechanik kann man sich die Integrationen von Differentialgleichungen anschaulich machen.

Wenn uns durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ein Vektorfeld gegeben ist, so läßt sich mechanisch die Sache so fassen, daß einem in Bewegung befindlichen Körper an jedem Punkte die Fortschreitungsrichtung vorgeschrieben ist. Der Körper wird auf seiner Bahn die Integralkurven beschreiben.

Dies leitet uns über zur Betrachtung der „approximativen Integration" von Differentialgleichungen.

Wir gehen von einem Punkte $P(x_0\, y_0)$ aus in der diesem Punkte zugeordneten Richtung ~~vor~~ nach dem Punkte $(x + \Delta x)$, von diesem Punkte aus gehen wir weiter in der ihm zugeordneten Richtung nach dem Punkte $(x + 2\Delta x)$, dann von hier in der zugeordneten Richtung nach dem Punkte $(x + 3\Delta x)$ u. s. w.

Statt der Integralkurven beschreiben wir ein ihr entsprechendes Polygon, oder statt die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ zu integrieren, integrieren wir die Differenzengleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y)$, von einem Punkte $P(x_0, y_0)$ beginnend um eine Strecke Δx fortschreitend, wobei wir zu einem geradlinig begrenzten Polygon kommen.

Lassen wir dann die Δx immer kleiner und immer zahlreicher werden, so kommen wir in der Grenze zu der Integralkurven.

Daraus ergiebt sich die folgende Regel:

Um die Integralkurven zu konstruieren, die von einem Punkte $P(x_0, y_0)$ ausläuft, konstruiere ich für hinreichend kleine Δx jedenfalls ein geradliniges Polygon, welches ich dann bei genügender Annäherung als die gesuchte Integral-

Kurven betrachten kann.

Dieses Ersetzen der Integralkurven durch ein gerad-liniges Polygon von immer kürzer werdenden Seiten ist genau das Analogon für den Grenzwert einer Summe, die Definition eines bestimmten Integrals etc.

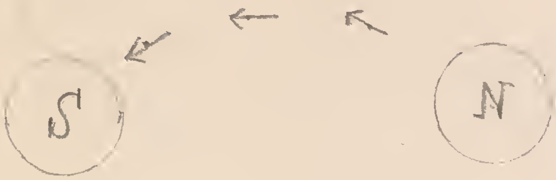
Wie man das Integral geradezu numerisch ausrechnen kann mit hinreichender Genauigkeit, indem man die entsprechenden Summen bildet, so können wir auch unsere Integralkurven mit hinreichender Genauigkeit bilden, indem wir das Polygon berechnen.

Jede Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 2 Variabeln, kann solcherweise mit beliebiger Genauigkeit empirisch integriert werden.

<u>Beispiel:</u>

Gegeben ist ein Magnet mit einer gewissen Kraft. Gesucht werden die Kraftlinien.
Dann haben wir den Fall, daß jedem Punkte des Magnetfeldes eine Richtung der magneti-

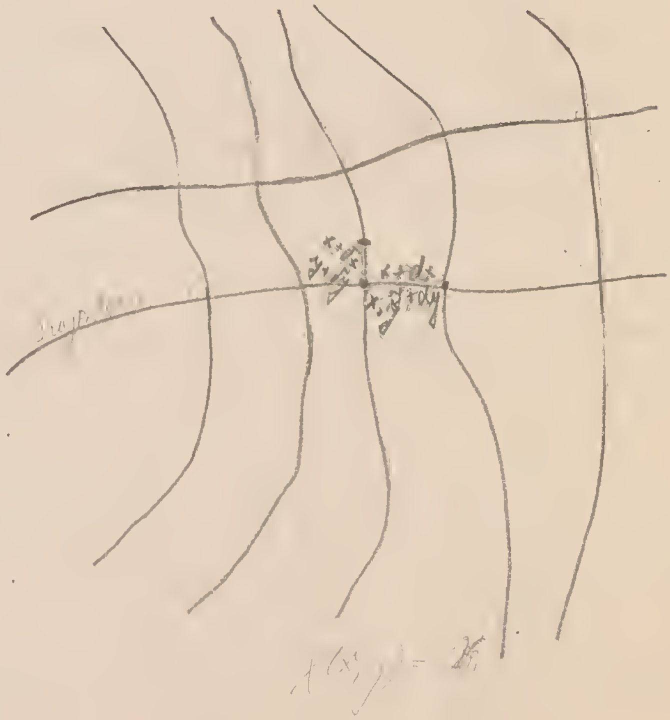
schen Kraft zugeordnet ist, wie wir sie mit dem Kompaß etwa finden können.



Das Aufsuchen der magnetischen Kurven läuft auf Integration der betreffenden gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung hinaus.
Wenn wir die magnetischen Kurven durch Eisenfeilspäne realisieren, dann verfahren wir mit Hülfe der Eisenfeilspäne so, als wenn wir die Integralkurven aus Polygonseiten zusammensetzen.
Bisher hatten wir uns für unsere Betrachtungen ein Feld abgegrenzt, in dem singuläre Punkte ausgeschlossen waren. Jetzt wollen wir untersuchen, wie es mit den singulären Punkten bestellt ist. Wir betrachten das an der Hand der „Aufgabe der verschwind-

ligen Gegentheilen".

Wir haben eine Curvenschar die der Gleichung genügt $\chi(x,y)=K$. Es ist die Aufgabe ein anderes Curvensystem zu construiren, das das gegebene rechtwinklig schneidet.



Wir wählen uns einen Punkt (x,y), und gehen von ihm aus zunächst in der Richtung der Tangente um das Stückchen dx bezw. dy vorwärts

Für den Punkt $(x+\delta x, y+\delta y)$ lautet die Gleichung $\chi[(x+\delta x),(y+\delta y)] = K$, nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt

$$\chi[x+\delta x, y+\delta y] = \chi(x,y) + \left[\frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial\chi}{\partial y}\cdot\delta y\right]$$

unter Vernachlässigung höherer Glieder.

Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial\chi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\chi}{\partial y}$ beiden gleich 0 sind, so ist

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}\cdot\delta x + \frac{\partial\chi}{\partial y}\cdot\delta y = 0$$

Nun gehen wir vom Punkte (x,y) aus in der Richtung der Normalen um das Stück (dx, dy) weiter. Da die Richtung der Normalen auf der Richtung der Tangente senkrecht steht, so gilt die Relation

$$\delta x\cdot dx + \delta y\cdot dy = 0$$

aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$dx : dy = \frac{\partial\chi}{\partial x} : \frac{\partial\chi}{\partial y}$$

oder unsere Trajektorien sind durch die

Differentialgleichung gegeben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\chi/\partial y}{\partial\chi/\partial x}.$$

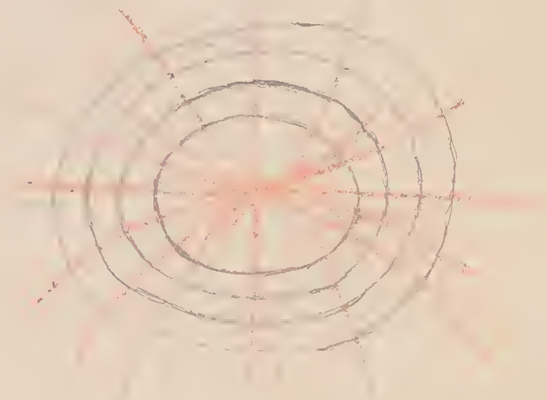
Diese Untersuchungen spielen eine wichtige Rolle bei der topographischen Kartenaufnahme.
Die sogenannten „Niveaukurven", die von 5 zu 5 Metern die Höhe des Geländes über dem Meeresspiegel angeben, entsprechen der Kurvenschar der Gleichung $\chi(x,y) = k$.
Unsere Trajektorien, welche die Niveaukurven überall ~~da~~ orthogonal durchsetzen, sind die Kurven stärksten Falles. Man pflegt sie gewöhnlich nur durch Schraffierung zu bezeichnen.
Zu unseren singulären Punkten führt uns nun die Betrachtung von Paßhöhen.
Das Gelände steigt hier an zwei gegenüberliegenden Seiten in die Höhe, während es nach den beiden anderen gegenüberliegenden Seiten abfällt.
In der Figur ist dies durch die eingetragenen Werte

„hoch" bezw. „tief" bezeichnet.

Wenn wir uns nun die Gefällkurven zu den Niveaukurven konstruieren, so ergibt die Anschauung, daß durch einen Punkt der ~~Ges~~ Paßhöhe zwei Gefällkurven hindurchlaufen. Diesen Punkt bezeichnet man als singulären Punkt.

Haben wir ~~uns~~ andererseits einen Gipfel als gegeben, wie wir uns z. B. durch ein rechtwinkliges Paraboloid darstellen können, so verlaufen die rechtwinkligen Gefällkurven überall radial.

In dem angegebenen Beispiele würden sich die Meridiankreise als Ellipsen auf die Zeichenebene projiziren.



Es giebt hier offenbar ebenfalls zwei Kugelkreise, die ~~durch den~~ sich im Gesichtsstrahle ~~sich~~ durchkreuzen, sie werden sich also die grosse bezw. die kleine Achse der Ellipse projiziren. Dies gilt allgemein.

Die übrigen unendlich vielen Kugelkreise werden in unserem speziellen Falle durch den Gesichtsstrahl hindurchgehen, indem sie die beiden festen Richtungen der Achsen tragen.

Im allgemeinen Falle werden die Kugelkreise

unter allen möglichen Azimuthen durch den Gipfelpunkt hindurchlaufen.

Noch spezieller als der Fall des elliptischen Paraboloids ist der des Rotationsparaboloids. Hier reduzieren sich die Niveaukurven als Kreise, während sich die Fallkurven als zugehörige Radien reduzieren.

Wenden wir uns nach diesen anschaulichen geometrischen Betrachtungen der analytischen Seite der Sache zu.

Wir setzen voraus, dass die Funktion $\varphi(x,y)$ entwicklungsfähig ist, nach dem Taylorschen

Satz. Dem singulären Punkte ordnen wir die Coordinaten x_0 und y_0 zu.

Bezeichnen wir alsdann nach Analogie der Flächentheorie die Differentialquotienten mit

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \cdot \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = t,$$

so ist, wenn wir uns auf Paraboloide beschränken,

$$\begin{aligned} \chi(x,y) = \; & \chi(x_0, y_0) \\ & + [p_0(x-x_0) + q_0(y-y_0)] \\ & + \tfrac{1}{2}\left[r_0(x-x_0)^2 + 2s_0(x-x_0)\cdot(y-y_0) + t_0(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

p_0 und q_0 sind gleich 0, so dass die erste eckige Klammer fortfällt. Ferner können wir durch Drehung des rechtwinkligen Coordinatensystems immer erreichen, dass das Glied mit s_0 zum Fortfall kommt, so dass unsere Gleichung schliesslich lautet.

$$\chi(x,y) = \chi(x_0, y_0) + \tfrac{1}{2}\left[r_0(x-x_0)^2 + t_0(y-y_0)^2\right]$$

Nun liegt nach den Sätzen der Krümmungs-theorie ein Sattel vor, wenn

$$s_0^2 - r_0 \cdot t_0 > 0$$

ist, während für

$$s_0^2 - r_0 t_0 < 0$$

ein Gipfelpunkt vorliegt.

Daraus geht hervor, daß wir eine Paßhöhe haben, wenn r_0 und t_0 verschiedenes Vorzeichen haben, während ein Gipfelpunkt vorliegt, wenn beide gleiches Vorzeichen haben, und zwar ein voller Gipfel, wenn beide negatives Vorzeichen haben.

Die Differentialgleichung für die Fallinien lautet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}}.$$

Wenn wir uns diese partiellen Differential-quotienten bilden, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t_0 (y - y_0)}{r_0 (x - x_0)}.$$

Man sieht, der Punkt (x_0, y_0) ist als singulär in diesem Beispiel dadurch charakterisiert, dass der Differentialquotient an allen Stellen einen bestimmten Wert hat, und nur in diesem Punkte den Wert $0/0$ annimmt.

Zur Lösung der Differentialgleichung lässt sich hier leicht die „Methode der Separation der Variabeln" anwenden.

Ich schaffe sämtlichen x enthaltenden Werte auf die eine, sämtliche y enthaltenden Werte auf die andere Seite.

$$\frac{r_0 \cdot dy}{y - y_0} = \frac{t_0 \cdot dx}{x - x_0}.$$

In solchen Fällen kann ich dann sofort integrieren

$$\int \frac{r_0 \cdot dy}{y - y_0} = \int \frac{t_0 \cdot dx}{x - x_0} + \text{Const.}$$

Wollen wir die auftretende Constante festlegen, so haben wir den Punkt (ξ, η) anzugeben, von dem aus wir unsere Integration beginnen wollen. Dann geht das unbestimmte Integral unter Fortfall der Constanten über in das bestimmte Integral

$$\int_\eta^y \frac{r_0\, dy}{y-y_0} = \int_\xi^x \frac{t_0 \cdot dx}{x-x_0}$$

Sind (ξ, η) und (x, y) zwei Punkte derselben Integralcurve, so wird das eine Integral von η bis y gleich sein dem anderen Integral von ξ bis x, und zwar werden sie gleich sein, weil bei jedem Schritt die unter dem Integralzeichen stehenden Incremente gleich sind.

Durch einfache Ausführung der Integration finden wir die Lösung der Differentialgleichung.

Die Gleichung war

$$\int \frac{r_0\, dy}{y-y_0} = \int \frac{t_0 \cdot dx}{x-x_0} + C.$$

ergiebt durch Quadratur

$$r_0 \cdot \log(y-y_0) = t_0 \cdot \log(x-x_0) + C.$$

Setzen wir die Konstante

$$C = \log K$$

so nimmt unsere Gleichung die Gestalt an

$$\log(y-y_0)^{r_0} = \log K(x-x_0)^{t_0}$$

oder

$$(y-y_0)^{r_0} = K(x-x_0)^{t_0}$$

Die Aufsuchung unseres angesetzten bestimmten Integrals führt auf dieselbe Weise zu der Lösung

$$\left(\frac{y-y_0}{\eta-y_0}\right)^{r_0} = \left(\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right)^{t_0}$$

Betrachten wir nunmehr die früher geometrisch überlegten Fälle analytisch.

a. Fall des Gipfelpunktes.

(Elliptisches bezw. Rotations-Paraboloid)

Nach unserer Überlegung müssen wir hier die

Koeffizienten r_0 und t_0 beide negative Werte annehmen. Setzen wir

$$r_0 = -\alpha \quad , \quad t_0 = -\beta$$

und machen die Voraussetzung

$$\alpha \leqq \beta.$$

Schreiben wir die Differenz

$$\chi(x_0, y_0) - \chi(x, y) = z_0 - z = \varepsilon,$$

so ist

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\alpha \cdot (x - x_0)^2 + \beta \cdot (y - y_0)^2\right]$$

Dies ist offenbar die Gleichung einer Ellipse.

Wir gewinnen den Satz:

Die Horizontalkurven des Paraboloids stellen sich in der (x, y) Ebene dar, als nach den Koordinatenachsen orientierte Ellipsen, herumgelagert um den Punkt x_0, y_0.

Die Achsen der Ellipsen erhalte ich aus der Gleichung, wenn ich das eine Mal $y = y_0$, das andere Mal $x = x_0$ setze. Es ergeben sich als Werte für die Achsen

$$1) \quad a = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha}} \quad \text{und} \quad 2.) \quad b = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\beta}}$$

Nach unserer Voraussetzung ($\alpha < \beta$) ist die Achse a (parallel zur X Achse) die große Achse unserer Ellipse, die Achse b (parallel zur Y Achse) die kleine Achse.

Ist $\alpha = \beta$, so ist auch $a = b$, es liegt der Fall des Rotationsparaboloides vor.

Alle Horizontalkurven stellen sich in der XY Ebene als Kreise um den Punkt x_0, y_0 dar.

Die Gleichung der Integralkurven lautet hier

$$(y - y_0)^{-\alpha} = K (x - x_0)^{-\beta}$$

oder

$$y - y_0 = K^{-\frac{1}{\alpha}} (x - x_0)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Setzen wir

$$K^{-\frac{1}{\alpha}} = C,$$

so heißt die Gleichung

$$y - y_0 = C (x - x_0)^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Diese Gleichung verschwindet identisch für den Punkt x_0, y_0. Daraus folgt:

Alle gesuchten Integralkurven gehen durch den Punkt x_0, y_0 hindurch, der den Scheitel unseres

Paraboloides entspricht.

Eine Antwort auf die Frage, in welcher Richtung die Integralkurven durch den Punkt x_0, y_0 gehen, erhalten wir durch differentiieren der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot \frac{\beta}{\alpha}\left(x-x_0\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}$$

Für den Wert $x = x_0$ ist

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Also: die Integralkurven haben in dem Punkte $(x_0 y_0)$ sämtlich eine horizontale Tangente, sie berühren die Parallele zur x Achse.

Als sogenannte „partikulären" Lösungen finden wir in der Schar der Integralkurven für

$c = 0$, — $y = y_0$, — die Parallele zur X Achse

und für $c = \infty$, — $x = x_0$ — die Parallele zur Y Achse.

Haben wir insbesondere ein Rotationsparaboloid, so ergibt sich, da $\beta = \alpha$ ist, folgende Gleichung für die Integralkurven

$$y - y_0 = c\left(x - x_0\right)$$

Daraus folgt: Alle Integralkurven laufen unter allen möglichen Azimuthen in den Gipfelpunkt hinein.

Ganz anders liegt die Sache, wenn wir den

b. Fall der Paßhöhe

zu Grunde legen, und zwar in seiner anschaulichsten Gestalt, nämlich das

hyperbolische Paraboloid.

Nach unseren früheren Untersuchungen haben wir hier den Koeffizienten r_0 und t_0 verschiedenes Vorzeichen zu geben. Wir setzen

$$r_0 = \alpha, \quad t_0 = -\beta.$$

Dann ist

$$z - z_0 = \frac{1}{2}\left[\alpha(x-x_0)^2 - \beta(y-y_0)^2\right]$$

Die Gleichung der rechtwinkligen Trajektorien ist hier

$$(y-y_0)^\alpha = \kappa \cdot (x-x_0)^{-\beta}$$

oder

$$(y-y_0)^\alpha \cdot (x-x_0)^\beta = \kappa$$

Eine partikuläre Lösung dieser Gleichung finden wir, wenn wir $\kappa = 0$ setzen. Als Lösung ergeben sich

$$1.)\ y = y_0 \qquad 2.)\ x = x_0$$

Als erste Integralkurven bekommen wir mithin zwei Gerade, von denen die erste parallel zur X Achse, die andere parallel zur Y Achse durch den Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht. Ist aber $\kappa \neq 0$, so lautet die Gleichung

$$y - y_0 = \kappa^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (x - x_0)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

oder wenn ich wieder

$$\kappa^{\frac{1}{\alpha}} = C$$

setze,

$$y - y_0 = C(x - x_0)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

Dies ist offenbar die Gleichung einer hyperbelartigen Kurve, die sich asymptotisch in die von den beiden vorgenannten Geraden gebildeten Quadranten einschmiegen.

Für den besonderen Fall, daß $\beta = \alpha$ ist, stellt die Gleichung

$$(y-y_0)(x-x_0) = C$$

eine gemeine Hyperbel vor, die auf ihre Asymptoten bezogen ist.

Wir haben damit gesehen, daß es singuläre Punkte von verschiedenem Charakter giebt und die einfachen Verhältnisse, die sonst im Bereiche gelten, an solchen singulären Punkten eine Modifikation erleiden können.

Wir wollen jetzt ein zweites Beispiel betrachten, wo $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ eine mehrwertige Funktion von x und y ist, so daß allgemein einer Fortschreitungsrichtung dx mehrere Fortschreitungsrichtungen dy zugeordnet werden können, die auch imaginär werden können.

Geometrisch machen wir uns die Sache klar an dem Problem der Haupttangentenkurven. Wir haben eine Fläche

$$z = \chi(x,y),$$

die wir ersetzen durch das im Punkte (x_0, y_0) konstruierte Schmiegungsparaboloid, dessen

Gleichung lautet

$$z = z_0 + \left[p_0 (x-x_0) + q_0 (y-y_0) \right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[r_0 (x-x_0)^2 + 2 s_0 (x-x_0)(y-y_0) + t_0 (y-y_0)^2 \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

unter Anwendung der uns von vorher geläufigen Zeichen aus der Flächentheorie.

Die Tangentialebene im Punkte (x_0, y_0) besitzt die Gleichung

$$z = z_0 + \left[p_0 (x-x_0) + q_0 (y-y_0) \right].$$

Wenn wir nun die Schnittkurven ~~auf den~~ zwischen Fläche und Tangentialebene auf die XY Ebene projizieren wollen, so haben wir in unseren analytischen Gleichungen z zu eliminieren, so dass ~~wir~~ durch Subtraktion unter Fortlassen höherer Glieder für die Schnittkurven die Gleichung erhalten

$$0 = \frac{1}{2}\left[r_0 (x-x_0)^2 + 2 s_0 (x-x_0)(y-y_0) + t_0 (y-y_0)^2 \right]$$

Die analytische Geometrie lehrt uns aus dieser

Gleichung die Folgerung zu ziehen, dass die Schnittkurven sich auf die XY Ebene als eine Kurve projiciren, die im Punkte (x_0, y_0) einen Doppelpunkt hat, wo sich 2 Äste kreuzen.

Will man von dem Punkte (x_0, y_0) um ein ganz kleines Stück (dx, dy) auf unserer Kurven fortschreiten, so haben wir einzusetzen

$$x - x_0 = dx \quad , \quad y - y_0 = dy ,$$

und man bekommt also für die Fortschreitungsrichtung in erster Annäherung die quadratische Gleichung

$$0 = \tfrac{1}{2}\left[r_0 \cdot dx^2 + 2 s_0 \cdot dx \cdot dy + t_0 \, dy^2 \right].$$

Da wir den Punkt (x_0, y_0), in dem wir die Tangentialebene angelegt haben, ganz willkürlich wählen können, er also in Wirklichkeit variabel ist, so können wir in dieser Gleichung statt der bestimmten Größen r_0, s_0, t_0 auch die variablen Größen s, r, t einführen, so dass diese die Gestalt annimmt

$$0 = r \cdot dx^2 + 2 s \cdot dx \, dy + t \, dy^2$$

durch diese Gleichung sind die beiden Äste der Schnittcurve mit Doppelpunkt, projiziert auf die XY Ebene, festgelegt.

Löse ich die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auf, so ergeben sich 2 Werthe für $\frac{dy}{dx}$, und mithin 2 Fortschreitungsrichtungen.

$$t \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy}{dx}\right) + r = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - r.t}}{t}$$

Alles kommt offenbar darauf an, wie der Werth

$$s^2 - r.t$$

beschaffen ist.

1) Ist $\quad s^2 - r.t > 0,$

so bekommen wir zwei reelle Werthe des $\frac{dy}{dx}$, und also auch 2 reelle Fortschreitungsrichtungen und 2 reellen Zweigtangenten.

2.) Ist $\quad s^2 - r.t < 0,$

so bekommen wir zwei imaginäre Werthe des $\frac{dy}{dx}$,

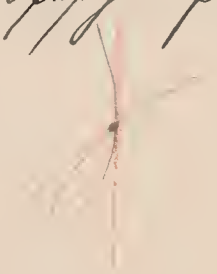
Also sind auch die Fortschreitungsrichtungen und die Haupttangenten imaginär.

3.) Ist schließlich ein Übergangsfall

$$s^2 - r \cdot t = 0,$$

so fallen die beiden Werte des $\frac{dy}{dx}$ in einen zusammen, dementsprechend auch die Fortschreitungsrichtungen und die Haupttangenten.

Im ersten Falle nennen wir den Doppelpunkt einen „hyperbolischen Punkt." Weil die Punkte



des Hyperboloids sich so verhalten.

Im zweiten Falle, wo wir den Fall des „isolierten" Punktes haben, nennen wir den Punkt einen elliptischen Punkt, weil sein Verhalten den Punkten des Ellipsoides entspricht.

Im letzten Falle, den Falle der „Spitze" nennen wir den Punkt wegen des Übergan-

gab zwischen den beiden anderen Fällen einen „parabolischen Punkt". Doch ist hierbei nicht an

ein Vorkommen solcher Punkte auf den Paraboloiden zu denken.

Um uns über den allgemeinen Verlauf der Schnittkurven zu orientieren, haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - p.t}}{t}$$

zu integrieren.

Bei der Integration tritt eine willkürliche Konstante auf, was dem entspricht, daß wir die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte anlegen können.

Es ist nun von vornherein klar, daß die hyperbolisch gekrümmten Teile der Fläche oder ihre Projektionen auf die X, Y Ebene von 2 Scha-

von den Integralkurven überdeckt werden, andererseits ist ebenso klar, daß die elliptischen Teile der Fläche oder ihre Projektionen auf die XY Ebene gar nicht von Integralkurven im Reellen überdeckt werden.

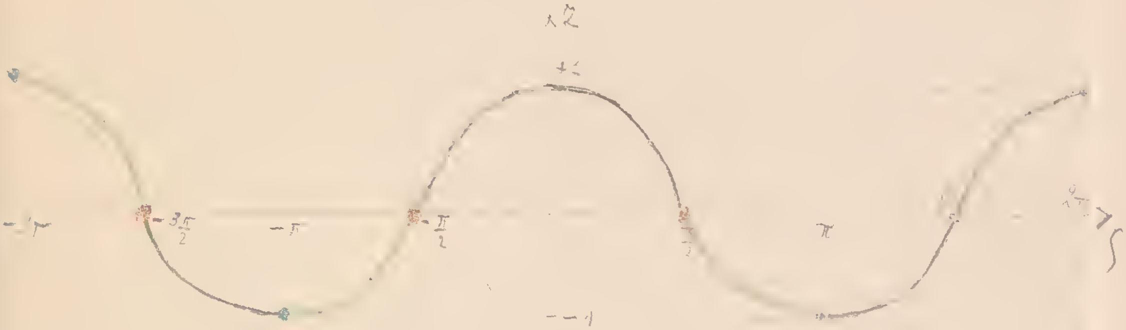
Es entsteht daher natürlich die Frage, wie wird sich der Übergang von hyperbolischen zu elliptischen Punkten der Fläche gestalten? Wie werden die Integralkurven verlaufen, wenn sie in die Nähe der sog. „parabolischen Kurven“ kommen?

Veranschaulichen wir uns dies durch ein

<u>Beispiel</u>:

Im (ρ, z) System zeichnen wir uns die Kurve

$$z = \cos\rho$$



Diese Kurve besteht aus Teilen, die teils konvex teils konkav gegen die Z Achse gekrümmt sind.

Die konkaven Stücke sind schwarz, die konvexen grün gezeichnet und die Grenzen durch blaue oder rote Punkte angemerkt.

Jetzt lassen wir die Kurve um die Z Achse rotieren. Fassen wir die von der ρ Achse dabei beschriebenen Ebene als X.Y Ebene auf, so

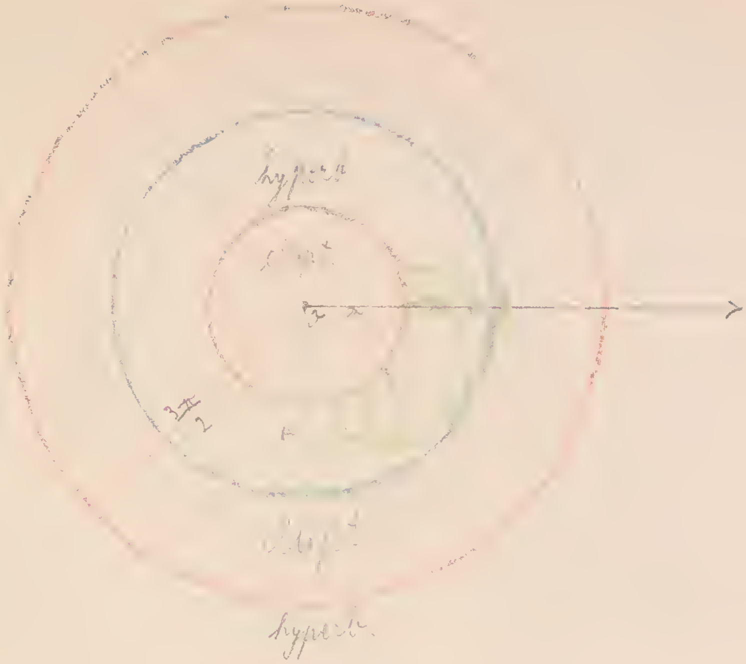
ist $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, mithin heißt die Gleichung der entstehenden Fläche

$$z = \cos\sqrt{x^2+y^2}.$$

Wir werden finden, daß bei der Drehung um die Z Achse die schwarz gezeichneten Teile der Cosinuslinie zu einem elliptisch gekrümmten Flächenteil erzeugen, dagegen die grün gezeichneten Teile einen hyperbolischen Flächenteil.
Die roten und blauen Punkte werden parabolische Kurven erzeugen.

Projizieren wir alles auf die X Y Ebene, so haben wir hier eine Reihe einander konzentrisch umgebender Kreisringe, welche alternierend elliptisch und hyperbolisch gekrümmte Teile der Fläche vorstellen.
Die parabolische Kurve wird gebildet von der Gesamtheit der konzentrischen Kreise mit den Radien $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π u.s.w.

Zur eleganteren Gestaltung der Auflösung drücken wir unsere Ansätze in Polarkoordinaten aus.



Wir haben zu setzen

$$x = \rho \cdot \cos\omega \qquad y = \rho \cdot \sin\omega,$$

woraus folgt

$$z = \cos\sqrt{x^2+y^2} = \cos\rho \cdot \quad \text{und} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

Um unsere Werte p, q, r, s, t auch in Polarkoordinaten auszudrücken, bilden wir uns die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} :$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \quad , \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{-xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3} \quad , \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}.$$

Nun lassen sich unsere gesuchten Koeffizienten leicht berechnen, es ist

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\rho \cdot \frac{x}{\rho}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin\rho \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos\rho \cdot \frac{x^2}{\rho^2} - \sin\rho \cdot \frac{y^2}{\rho^3}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = -\cos\rho \, \frac{xy}{\rho^2} + \sin\rho \cdot \frac{xy}{\rho^3}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos\rho \, \frac{y^2}{\rho^2} - \sin\rho \cdot \frac{x^2}{\rho^3}$$

Betrachten wir nun zunächst genauer unser System von Integralkurven, dasselbe ist durch die Differentialgleichung

$$0 = r \cdot dx^2 + 2s\, dx \cdot dy + t\, dy^2.$$

Wenn wir uns die Richtungen der Integralkurven auf einer bestimmten Geraden, z. B. der positiven X Achse anmerken, so brauche ich nur diese X-Achse um 360° zu drehen, um den ganzen Verlauf der Integralkurven zu bekommen.

Mache ich diese Annahme wirklich an der positiven X-Achse, wo $x = \rho$, $y = 0$, mithin

$$r = -\cos\rho\,, \quad s = 0, \quad t = -\frac{\sin\rho}{\rho}$$

ist, so haben wir die Gleichung aufzulösen

$$0 = -\cos\rho \cdot dx^2 - \frac{\sin\rho}{\rho} \cdot dy^2,$$

oder

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{\rho \cdot \cos\rho}{\sin\rho}$$

mithin

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{\rho\cdot\cos\rho}{\sin\rho}} = \pm\sqrt{-\frac{x\cos x}{\sin x}}$$

Für unseren ersten hyperbolischen Kreisring läuft x von $\frac{\pi}{2}$ bis π. Wir finden für

$x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 0$

$x = \pi$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \infty$

Dazwischen wird der Differentialquotient vermöge der Stetigkeit der Kurven von 0 bis ∞ stetig verlaufen, und zwar ergeben sich jedesmal entsprechend dem positiven und negativen Vorzeichen zwei Kurven.

Auf dem roten Kreise haben wir folglich immer eine horizontale Tangente, auf dem kleinen Kreise

immer eine vertikale, und dazwischen zwei gekrümmte Tangenten, die von $\frac{\pi}{2}$ nach π zu immer steiler werden.

Wenn wir nun die X-Achse um 360° drehen und überlegen, was für Kurven diese Tangenten bei der Umdrehung beschreiben, so werden als Ergebnis unserer geometrischen Überlegung finden, daß die Integralkurven in den einzelnen hyperbolischen ringförmigen Bereichen, eine cykloidenartige Gestalt haben, welche auf dem inneren Kreise mit Spitzen senkrecht aufstehen, während sie den äußeren Kreis zweimalig berühren.

Nachdem wir uns die Sache geometrisch anschaulich gemacht haben, wollen wir sie nun analytisch darzustellen.

Wir haben

$$dx = \cos\omega \cdot d\rho - \rho \cdot \sin\omega \cdot d\omega$$

$$dy = \sin\omega \, d\rho + \rho \cdot \cos\omega \cdot d\omega$$

daraus folgt.

$$dx^2 = \cos^2\omega\, d\rho^2 - 2\rho\cdot\sin\omega\cdot\cos\omega\, d\rho\cdot d\omega + \rho^2 \sin^2\omega\, d\omega^2$$

$$dx\cdot dy = \sin\omega\cdot\cos\omega\, d\rho^2 + \rho\,(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\, d\rho\cdot d\omega - \rho^2 \sin\omega\cos\omega\, d\omega^2$$

$$dy^2 = \sin^2\omega\, d\rho^2 + 2\sin\omega\cdot\cos\omega\, d\rho\cdot d\omega + \rho^2\cos^2\omega\, d\omega^2$$

Nun können wir in dieser Gleichung

$$r\cdot dx^2 + 2s\cdot dx\cdot dy + t\, dy^2 = 0$$

vermöge dieser und der vorher für r, s, t berechneten Relationen in Polarkoordinaten ersetzen.
Es ergiebt sich die einfache Form

$$-\cos\rho\cdot d\rho^2 - \rho\cdot\sin\rho\cdot d\omega^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^2 = -\frac{\cos\rho}{\rho\cdot\sin\rho}$$

folglich

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \pm\sqrt{-\frac{\cos\rho}{\rho\cdot\sin\rho}}$$

also auch

$$d\omega = \pm\sqrt{-\frac{\cos\rho}{\rho\cdot\sin\rho}}$$

Will ich den ganzen Verlauf der Integralkurven sehen, so brauche ich nur zu integrieren

$$w = \int_{\rho_0} \pm \sqrt{-\frac{\cos\varphi}{\rho \cdot \sin\varphi}} \cdot d\rho \; + \text{Konst.}$$

Es ist wieder der besonders einfache Fall eingetreten, daß die Variabeln sich von vornherein als separiert ergeben. Die vorgeschriebene Quadratur läßt sich leicht ausführen und zwar numerisch. Wenn ich sie ausgeführt denke, so bekomme ich dadurch den einzelnen Bogen unserer Integralkurven, den ich der Art nach bereits gezeichnet hatte, quantitativ mit jeder gewünschten Genauigkeit.

Aus einer Integralkurve erhalte ich die anderen, indem ich die Kurven um den Punkt O jedesmal um einen beliebigen Winkel drehe.

Die roten Teile der parabolischen Kurven sind die geometrischen Örter für die Spitzen der Integralkurven, die blauen Teile sind Enveloppen

der Integralkurven.

Die blauen Kreise, welche Enveloppen sind, sind die Berührungskreise, die unsere Fläche mit den Ebenen $z=+1$ und $z=-1$ gemein hat, während die roten Kreise die Schnittlinien sind, die unsere Fläche mit der Ebene $z=0$ gemein hat.

Außer der einfach unendlichen Schar der allgemeinen Integralkurven, welche zykloidenartige Gestalt haben, giebt es eine einzige besondere singuläre Integralkurve, das ist der einschließende blaue Kreis selbst.

Demnach hat unsere Differentialgleichung erstlich als allgemeine Lösungen die zykloidenartigen Integralkurven $\omega = \int \pm\sqrt{-\frac{\cos\rho}{\rho\cdot\sin\rho}}\cdot d\rho + \text{Const}$, zweitens aber als singuläre Lösung die Kreise mit den Radien $\rho=\pi, 2\pi, 3\pi$ u. s. w.

Von allgemeinem Interesse ist hierbei der folgende Gesichtspunkt: Wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung jedem Punkte (x,y) mehrere Fortschreitungsrichtungen zuordnet und wir betrachten die

Punkte, für die die Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen, dann können Teile der „parabolischen Kurven singuläre Lösungen der betreffenden Differentialgleichung sein.

Wenn wir hier einen Rückblick machen wollen und unsere bisherigen Ergebnisse zusammenfassen, so haben wir jetzt betrachtet die Beispiele der „Kurven stärksten Falles" und der „Haupttangentenkurven". Wir haben an beiden Beispielen die allgemeinen Lösungen studiert, das erste Beispiel führte uns speziell zum Studium der „singulären Punkte", während uns das zweite Beispiel mit den „singulären Lösungen" einer Differentialgleichung bekannt machte.

Genau in der gleichen Weise wie wir so die Differentialgleichungen erster Ordnung studierten, wollen wir uns auch mit den Differentialgleichungen zweiter Ordnung kurz beschäftigen.

Eine solche Differentialgleichung zweiter Ord-

nung erscheint allgemein in der Gestalt

$$\Omega(x, y, y', y'') = 0,$$

oder nach y'' aufgelöst

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

Wir werden uns zunächst wieder geometrisch die Bedeutung einer solchen Differentialgleichung klar machen.

Wir können in unserem XY System einen Punkt (x, y) und die zugehörige Richtung (y') willkürlich wählen. Nennen wir dies ein Linienelement, so können wir fragen: Vermöge unserer Differentialgleichung erhalten wir zu jedem Linienelement derselben den Wert des y''.

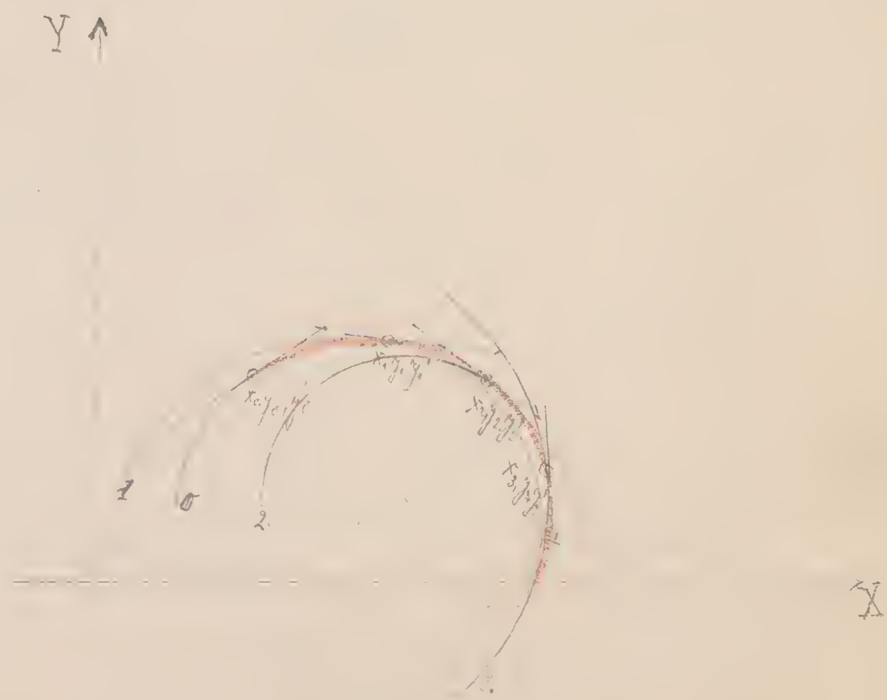
Diesen Wert des y'' interpretieren wir geometrisch als Krümmung. Der Wert des Krümmungsradius wird bekanntlich angegeben durch die Gleichung

$$R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

Als Integralkurve erscheint nun jede Kurve, die in jedem Punkte vermöge ihres x, y, y' und ihres y'' der gegebenen Differentialgleichung genügt.

Analog wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir auch hier eine Methode zur „approximativen Integration" anzuwenden.

Wir gehen aus von einem Punkte (x_0, y_0) mit der Tangente y_0' und zeichnen den zugehörigen Krümmungskreis (0).



Auf dem Krümmungskreise gehe ich ein Stückchen vorwärts bis zu dem Punkte (x_1, y_1) mit der Richtung y_1' und konstruiere nun für diesen Punkt den Krümmungskreis (1). Dann gehe ich auf diesem Krümmungskreise ein Stückchen weiter bis zu dem Punkte x_2, y_2 mit der Richtung y_2', konstruiere wieder für diesen Punkt den Krümmungskreis u. s. w. So komme ich schließlich zu einem Kreisbogenpolygon, das ohne Knick an einander schließt, da an den Stellen, wo sich die Kreisbogensegmente aneinandersetzen, für beide Kreise das y' gleich ist.

Der allgemeine Gedanke ist folgender:

Um die Integralkurve, die zu dem Anfangswerte x_0, y_0, y_0' gehört, approximativ zu zeichnen, werden wir von dem Anfangselemente aus ein Kreisbogenpolygon konstruieren, das um so genauer mit der Integralkurve zusammenfallen wird, je kürzer und infolgedessen zahlreicher wir die Kreisbogenstücke nehmen.

Da ich von jedem Punkte (x_0, y_0) aus mit beliebigem y_0' beginnend eine Integralkurve bekommen, da ich andrerseits, um eine bestimmte Integralkurve zu haben, daß (x_0, y_0) noch einer beliebigen Bedingung unterwerfen darf, so habe ich zwei willkürliche Konstanten zur Verfügung, oder wir haben eine zweifach unendliche Schar von Integralkurven.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen wenden wir uns einem Beispiel zu.

Wir betrachten die Differentialgleichung der kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \cdot y,$$

worin wir y als Raum, x als Zeit interpretieren müssen.

Unsere Gleichung sagt aus, die Beschleunigung oder die Kraft, welche auf den Massenpunkt wirkt, ist dem Ausschlag direkt proportional, aber von umgekehrtem Vorzeichen.

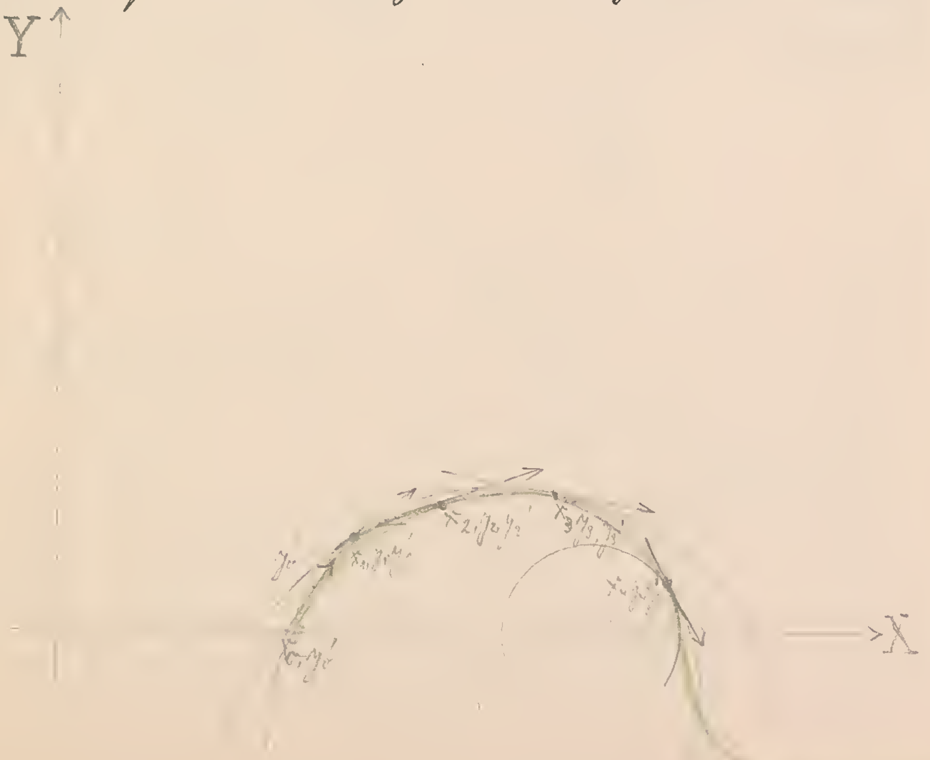
Wir wollen versuchen eine Integralkurve approximativ zu zeichnen.

Da y'' und y stets entgegengesetztes Vorzeichen haben, so wird die Integralkurve der X-Achse immer ihre konkave Seite zukehren.

Gehen wir von einem Punkte der X-Achse aus, x_0, ordnen ihm willkürlich die Richtung y'_0 zu, und konstruieren den zugehörigen Krümmungskreis, der den Radius

$$R = \frac{-\sqrt{(1+y'^2)^3}}{a^2 \cdot y}$$

besitzt, also an der Stelle $y = 0$ unendlich wird.



Ich gehe also auf der Geraden ein Stück vorwärts bis zu dem Punkte (x_1, y_1), dann ich die Richtung y_2' zuordnen, konstruiere den Krümmungskreis und gehe auf ihm ein Stückchen vorwärts bis zu dem Punkte (x_2, y_2) u. s. w. Es ergiebt sich schließlich als Integralkurve eine Sinuskurve, was uns nicht weiter verwunderlich erscheint, da wir ja ~~die~~ ~~u.~~ Lösung unserer Differentialgleichung

$$y = C \cdot \sin a(x - x_0)$$

kennen.

~~Ehe~~ Bevor wir die Integration analytisch ausführen, wollen wir noch ein zweites Beispiel betrachten ~~und~~

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = + a^2 \cdot y,$$

das wir analytisch integrieren.

Wir finden sofort die beiden partikulären Lösungen

$$y_1 = e^{ax} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{-ax},$$

woraus sich die allgemeine Lösung nach der

Formel

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

also

$$y = C_1 \cdot e^{ax} + C_2\, e^{-ax}$$

ergiebt.

Wollen wir nun ganz derselben Weise auch die Differentialgleichung unseres ersten Beispiels analytisch integrieren, so finden wir

$$y_1 = e^{iax} \qquad y_2 = e^{-iax}.$$

Wenn wir jedoch aus diesen particulären Lösungen nun die allgemeine Lösung bestimmen, wollen wir die Lösungen erst reell machen, die Euler'sche Formel liefert uns die Werte

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \cos ax$$

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin ax.$$

Mithin können wir die allgemeine Lösung aufstellen

$$y = K \cdot \cos ax + L \cdot \sin ax.$$

Wir konnten aber bereits die Lösung als

$$y = C \cdot \sin a(x - x_0).$$

Eine kleine interessante Zwischenrechnung soll uns zeigen, daß beide Werte identisch sind. Ich setze

$$\varkappa = C \cdot \cos a x_0 \quad \text{und} \quad \lambda = - C \cdot \sin a x_0$$

dann ist C bestimmt durch die Gleichung

$$\varkappa^2 + \lambda^2 = C^2$$

oder

$$C = \sqrt{\varkappa^2 + \lambda^2}.$$

Aus der Gleichung

$$\varkappa = C \cdot \cos a x_0$$

bestimmt sich ferner

$$x_0 = \frac{1}{a} \arccos \frac{\varkappa}{C},$$

so daß beide Konstanten durch unsere früheren Konstanten vollkommen bestimmt sind. Unsere Gleichung

$$y = \varkappa \cdot \sin ax + \lambda \cdot \cos ax$$

geht durch Einsetzen der für $\varkappa$ und λ angesetzten Werte über in

$$y = C(\sin ax \cdot \cos ax_0 - \cos ax \cdot \sin ax_0)$$

oder

$$y = C \cdot \sin a(x - x_0)$$

Es bleibt nur noch übrig, die Bedeutung der Konstanten in unserem Beispiele anzuführen: C ist die Amplitude des Magnetausschlags, x_0 die Phase der Schwingung.

Wir wollen im folgenden uns noch kurz mit einem weiteren Beispiel bekannt machen, das uns im Verlaufe der Vorlesung noch häufiger beschäftigen wird, mit der geodätischen Linie. Und zwar wollen wir uns beschäftigen mit der Einführung in die Theorie dieser Kurven.

Eine geodätische Linie kann man auf mannigfache Weise definieren. Wir gehen von folgender Definition aus:

Als geodätische Linie bezeichnet man die Gleichgewichtslage eines gespannten Fadens auf einer durchaus glatten Fläche.

Diese geodätische Linie projiziert auf die (XY) Ebe-

an, befriedigt dort eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir aufstellen wollen. Die Untersuchungen die hierzu nötig sind, führen uns zugleich in wünschenswerter Weise in das Studium der Raumkurven ein.

Eine Raumkurve ist bestimmt durch 3 Koordinaten x, y, z, die wir als Funktionen eines Hülfsparameters t auffassen können

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

wobei wir voraussetzen, daß φ, ψ, χ entwicklungsfähig sind nach dem Taylorschen Satz, so daß wir haben

$$x = x_0 + x_0'(t-t_0) + \frac{x_0''}{2}(t-t_0)^2 + \cdots\cdots$$

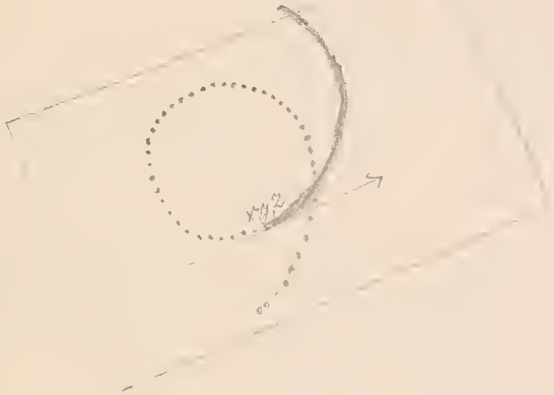
$$y = y_0 + y_0'(t-t_0) + \frac{y_0''}{2}(t-t_0)^2 + \cdots\cdots$$

$$z = z_0 + z_0'(t-t_0) + \frac{z_0''}{2}(t-t_0)^2 + \cdots\cdots$$

Betrachten wir zum Beispiel eine Schraubenlinie und ziehen im Punkte x_0, y_0, z_0 die Tangente, so können wir durch diese Tangente ein Büschel von

Ebenen legen, die die Kurven sämtlich in dem Punkte (x_0, y_0, z_0) berühren.

Von allen diesen Tangentialebenen zeichnet man eine aus und nennt sie die „Oscillationsebene." Es ist dies diejenige Ebene, welche die Kurven nicht bloß berührt, sondern auch durchsetzt.



Wir brauchen nun für unsere Untersuchungen nicht die Raumkurven selbst, sondern gewisse Schmiegungskurven.

Berücksichtigen wir nur lineare Glieder, so bekommen wir in

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0)$$
$$y = y_0 + y_0'(t - t_0)$$
$$z = z_0 + z_0'(t - t_0)$$

die Gleichungen der Tangente.

Brauchen wir auch die Glieder zweiten Grades noch, so bekommen wir die Gleichung eines Schmiegungskegelschnitts,

$$x = x_0 + x_0'(t-t_0) + \frac{x_0''}{2}(t-t_0)^2$$
$$y = y_0 + y_0'(t-t_0) + \frac{y_0''}{2}(t-t_0)^2$$
$$z = z_0 + z_0'(t-t_0) + \frac{z_0''}{2}(t-t_0)^2,$$

der sich schon besser an die gegebene Raumkurven anschmiegt.

Wir behaupten nun, „die Ebene dieses Kegelschnittes ist die Oskulationsebene."

Unsere Aufgabe wird daher eine doppelte sein, nämlich 1) haben wir die Ebene dieses Kegelschnitts zu bestimmen und 2) den Nachweis zu führen, daß diese Ebene unsere Kurve durchsetzt.

Irgend eine Ebene die unsere Kurve schneidet, erfüllt die Gleichung

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Soll diese Ebene zugleich die Tangente in sich enthalten, so muß sie der Bedingung

$$x - x_0 = x_0'(t - t_0)$$

$$y - y_0 = y_0'(t - t_0)$$

$$z - z_0 = z_0'(t - t_0)$$

genügen, oder es muß sein

$$A x_0' + B \cdot y_0' + C z_0' = 0,$$

wo sich $(t - t_0)$ als gemeinsamer Factor herausgehoben hat.

Soll die Ebene aber weiterhin den [illegible] in sich enthalten, so muß auch

$$A x_0'' + B y_0'' + C z_0'' = 0$$

sein, wo sich wieder $\frac{(t-t_0)^2}{2}$ heraushebt.

Diesen 3 Bedingungen muß unsere Ebene genügen, oder wenn wir die A, B, C eliminieren, so muß die folgende Determinante verschwinden

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ x_0', & y_0', & z_0' \\ x_0'', & y_0'', & z_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist nun der Nachweis zu führen, dass die Ebenen, für welche die obige Determinante verschwindet, ~~welche~~ wirklich die Curven durchsetzt.

Wenn ich nun für

$$x-x_0,\quad y-y_0,\ z-z_0$$

in der Gleichung der Ebene die zugehörigen Reihen ~~Reihen~~ einsetze, so verschwinden die Glieder erster und zweiter Ordnung von selbst, weil die A, B, C so bestimmt sind, und es bleiben also nur die Glieder vom dritten Grade an stehen. Aus den einzelnen Termen kann ich $(t-t_0)^3$ als gemeinsamen Faktor heraus ziehen.

$$(t-t_0)^3\left[A\left(\frac{x_0'''}{6}+\cdots\right)+B\left(\frac{y_0'''}{6}+\cdots\right)+C\left(\frac{z_0''}{6}+\cdots\right)\right]=0$$

Für kleine Werte des $(t-t_0)$ werden die Glieder dritter Ordnung die Glieder höherer Ordnung so beträchtlich überwiegen, dass ich letztere in der angenäherten Rechnung fortlassen kann, unser Ansatz lautet daher

$$(t-t_0)^3\cdot\left(A\frac{x_0'''}{6}+B\cdot\frac{y_0'''}{6}+C\cdot\frac{z_0'''}{6}\right)=0.$$

In der zweiten Klammer stehen nun nur noch konstante Größen, so daß wir haben

$$(t-t_0)^3 \cdot C = 0$$

Wenn wir nun die Variable t durch den konstanten Punkt t_0 hindurchgehen lassen, so ändert die Gleichung ihr Vorzeichen. Dies beweist, daß die Kurve im Punkte $t=t_0$ von ihrer Ebene durchsetzt wird, und also haben wir in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0, & z-z_0 \\ x_0', & y_0' & , z_0' \\ x_0'', & y_0'' & , z_0'' \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Oskulationsebene erhalten.

Nehmen wir an, daß unsere Kurve auf einer Fläche

$$F(x,y,z) = 0$$

verläuft, so ist die Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche im Punkte (x_0, y_0, z_0)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = 0.$$

die Richtung der Normalen auf der Fläche drückt sich dann mit Hülfe des Proportionalitäts-faktors τ aus durch die Gleichungen:

$$x - x_0 = \tau \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$$

$$y - y_0 = \tau \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$$

$$z - z_0 = \tau \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$$

~~Unsere Bedingung ist nun:~~ Wir verlangen jetzt, dass „die Oskulationsebene enthält die Normale in sich"

Wenn wir dies in einer Gleichung ausdrücken wollen, so haben wir für $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, die obigen Werte einzusetzen, so dass diese lautet

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0, & \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0, & \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \\ x'_0, & y'_0, & z'_0 \\ x''_0, & y''_0, & z''_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine geodätische Linie können wir nun so definieren:

„Eine Kurve auf einer Fläche heisst geo=

dätische Linie, wenn an jeder Stelle die Osculationsebene die Normale der Fläche enthält.

Analytisch drückt sich dies aus durch Weglassen des Index 0, so dass die Gleichung dann heißt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese allgemeine Form wollen wir nun specialisieren.

Die Gleichung der Fläche sei nach z aufgelöst

$$z = X(x,y).$$

Und wir setzen wieder in Analogie mit der Flächentheorie

$$\frac{\partial X}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x \cdot \partial y} = s$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = t,$$ wobei dieses t natürlich nicht mit dem früher eingeführten Parameter t in Beziehung zu bringen ist.

Die Gleichung der Fläche ist dann

$$F(x,y,z) = X(x,y) - z = 0.$$

Wir fassen nun x als unabhängige Variable auf, y als abhängig von x, und z bestimmt sich aus der Flächengleichung als Funktion von x und y.

Wir finden so folgende Werte für die allgemeinen Glieder unserer Determinante.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Es ist nun natürlich $x' = 1$, $x'' = 0$, und es hat die Bedeutung

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Aus der Gleichung

$$z = X(x,y)$$

folgt

$$z' = p + q \cdot y'$$

und hieraus weiter

$$z'' = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot y'\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \cdot y'\right) \cdot y' + q \cdot y''$$

$$= r + 2s \cdot y' + t \cdot y'^2 + q \cdot y''.$$

So nimmt unsere Determinante nun folgende Gestalt an

$$\begin{vmatrix} p & , q & , -1 \\ 1 & , y' & , p+q\cdot y' \\ 0 & , y'' & , r+2s\cdot y'+ty'^2+q\cdot y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Durch einfache Ausrechnung dieser Determinante erhalten wir folgende Gleichung

$$y''(1+p^2+q^2) = (p\cdot y'-q)(r+2sy'+ty'^2)$$

die Bestimmung der geodätischen Linie erfolgt bei diesem ersten Ansatze also so, dass man zunächst die Abhängigkeit des y von dem x sucht, d. h. die Projektion der geodätischen Linie auf die XY Ebene. Für diese Projektion bekommen wir in der Art eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen x und y. Hierauf bestimmen ~~für~~ wir das z durch die Flächengleichung

$$z = \underline{X}(x,y)$$

Eine andere Art unsere allgemeinen Ausführungen zu spezialisieren wollen wir im folgenden betrachten.

Wir legen unserer Untersuchung zu Grunde eine Rotationsfläche, die die Z Achse als Rotationsachse besitzt und deren Gleichung ist

$$z = X(\rho),$$

wo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ und also

$$x = \rho \cdot \cos w \quad , \quad y = \rho \cdot \sin w.$$

sind.

Hier fassen wir ρ als die ursprüngliche Variable auf, w als Funktion von ρ, die so bestimmt werden soll, daß wir uns eben auf einer geodätischen Linie vorwärts bewegen.

$z = X(\rho)$ ist von Hause aus, ~~die~~ als Funktion von ρ bestimmt.

Durch Ausführung der partiellen Differentiationen werden die Glieder der Determinante

$$p = \frac{\partial X}{\partial \rho} \cdot \frac{d\rho}{dx} = \cos w \cdot X'$$

und entsprechend $\quad q = \sin\omega \cdot X'$

Ferner ergeben sich

$$x' = \frac{dx}{d\rho} = \cos\omega - \rho\sin\omega \cdot \omega'$$

$$x'' = \frac{dx'}{d\rho} = -2\sin\omega\cdot\omega' - \rho\cdot\sin\omega\cdot\omega'' - \rho\cdot\cos\omega\cdot\omega'^2$$

und entsprechend ist

$$y' = \sin\omega + \rho\cdot\cos\omega\cdot\omega'.$$

$$y'' = 2\cos\omega\cdot\omega' + \rho\cdot\cos\omega\cdot\omega'' - \rho\cdot\sin\omega\cdot\omega'^2.$$

Schließlich ist

$$\frac{dz}{d\rho} = X' \text{ und } z'' = X''$$

Dadurch erhalten wir folgende Gleichung in Determinantenform

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\omega\cdot X', & \sin\omega\cdot X', & -1 \\ \cos\omega - \rho\cdot\sin\omega\cdot\omega', & \sin\omega + \rho\cdot\cos\omega\cdot\omega', & X' \\ \left\{\begin{matrix} -2\sin\omega\cdot\omega' \\ -\rho\cdot\sin\omega\cdot\omega'' - \rho\cdot\cos\omega\cdot\omega'^2 \end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix} 2\cdot\cos\omega\cdot\omega' \\ +\rho\cdot\cos\omega\cdot\omega'' - \rho\cdot\sin\omega\cdot\omega'^2 \end{matrix}\right., & X'' \end{vmatrix}$$

oder wenn ich die Determinante auflöse

$$0 = \rho\,(1+X'^2)\,\omega'' - \left(\rho\cdot X'\cdot X'' - 2\,(1+X'^2)\right)\cdot\omega' + \rho^2\cdot\omega'^3$$

Wir können unser Resultat in folgender Weise fassen:

Ist eine Rotationsfläche gegeben $z = X(\rho)$ und man führt in der (X,Y) Ebene als Polarkoordinaten ρ und ω ein und sieht einerseits ω, andererseits z als Funktion von ρ an und verlangt, daß man sich auf einer geodätischen Linie bewegt, dann ist ω mit der unabhängigen Variablen ρ durch folgende Differentialgleichung verbunden:

$$0 = \rho(1+X'^2)\cdot\omega'' - \left[\rho\cdot X'\cdot X'' - 2(1+X'^2)\right]\cdot\omega' + \rho^2\omega'^3.$$

z erhält man aus der Flächengleichung

$$z = X(\rho)$$

II.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten, warum man diese Linien „geodätische" Linien nennt.

In der Geodäsie ~~E~~ schlägt man bei einer großzügigen Vermessung so vorzugehen, daß man

einer Reihenfolge von Punkten A_{-1}, A, A_1, A_2 u.s.w. bestimmt, indem man an jedem einzelnen Punkte den Theodoliten normal aufstellt, nach dem vorhergehenden Punkte hinvisirt, das Fernrohr durchschlägt und nach dem folgenden Punkte hinvisirt. Wir bekommen so einen geodätischen Polygonzug, der da die Erde keine Kugel ist, also die Normalen nicht in einer Ebene liegen, auch nicht in einer Ebene liegen wird.

Unser Polygonzug hat die Eigenschaft, daß an jeder Ecke die Ebene, die den vorhergehenden und die folgende Seite enthält, gleichzeitig die Normale der Erdoberfläche in diesem Punkte enthält.

Läßt man das geodätische Polygon durch immer zahlreicher und entsprechend kleiner werdende Seiten in eine Kurve übergehen, dann verwandelt sich die Ebene, welche zwei aufeinanderfolgende Seiten enthält, in die Osculationsebene der Kurve, wir haben dann also eine Kurve deren Normale in die Osculationsebene fällt. Alle Kurven, welche diese letzte Eigenschaft haben, nennt man wegen dieser Beziehung zur Geodäsie geodätische Linien.

Daß diese so gefundene Ebene die Kurven auch durchdringt, sieht man aus folgendem: Bei einem geodätischen Polygonzug hat die Ebene, welche zwei aufeinander folgende Seiten enthält, die Eigenschaft den Polygonzug zu durchdringen. Wenn nun in der Grenze das Polygon zur stetig gekrümmten Kurve wird, so muß die Ebene auch die Kurve durchdringen.

Wir haben uns in dem vorhergehenden Abschnitte damit beschäftigt, was eine Differentialgleichung ist, und was sie im einzelnen Falle geometrisch bedeutet. Wir sahen dabei bereits, daß sich jede solche Differentialgleichung numerisch mit jeder gewünschten Genauigkeit integrieren läßt. Das Thema dieses nächsten Abschnittes soll nun

Die allgemeine Integration von Differentialgleichungen

sein.

Wir haben bis jetzt kennen gelernt Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung von der allgemeinen Form

$$\Omega(y', y, x) = 0$$

bezw.

$$\Omega(y'', y', y, x) = 0$$

Wir werden diese beiden Arten von Differentialgleichungen zusammen behandeln und zu lösen versuchen. Bei der Ausführung

Der Integrationen wird sich unsere jeweilige Aufgabe entweder auf bekannte Funktionen zurückführen lassen, oder wir werden auf neue Funktionen stoßen, die aber durch die Differentialgleichung definiert werden.

Betrachten wir als erste eine Differentialgleichung ~~erster~~ $n$ter Ordnung, deren sämtliche Differentialquotienten aber linear auftreten und mit konstanten Koeffizienten versehen sind. Zugleich setzen wir zunächst voraus, daß die Gleichung homogen ist, also etwa folgende Form hat

$$a \cdot y^{(n)} + b\, y^{(n-1)} + c \cdot y^{(n-2)} + \cdots\cdots + m y' + n y = 0$$

Geometrisch gedeutet, bedeutet diese Gleichung: Einer Abscisse x_0, können wir eine Ordinate y_0 willkürlich zuordnen und zugleich ebenso willkürlich die ersten $(n-1)$ Differentialquotienten festlegen, der $n$te Differentialquotient wird dann durch die Gleichung angegeben. Wir können also n Größen willkürlich wählen.

Infolge dieser geometrischen Überlegung werden wir in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $\underline{n}$ willkürliche Konstante erwarten dürfen.

Bereits früher haben wir gesehen, daß wir die allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung aus partikulären Lösungen zusammensetzen können. Wir werden daher zunächst versuchen, eine partikuläre Lösung zu finden und setzen

$$y = e^{\lambda x},$$

dann wird unsere Gleichung, da

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \; \cdots\cdots, \; y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}, \; y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$$

sind zu

$$e^{\lambda x}\left[a \cdot \lambda^n + b \cdot \lambda^{n-1} + \cdots\cdots + m \cdot \lambda + n\right] = 0.$$

Wenn also unser beliebig gewählter Wert

$$y = e^{\lambda x}$$

eine Lösung der Differentialgleichung sein soll, so muß

$$\left[a\, \lambda^n + b \cdot \lambda^{n-1} + \cdots\cdots + m \cdot \lambda + n\right] = f(\lambda) = 0$$

sein.

Diese Gleichung

$$f(\alpha) = 0$$

nennt man die „charakteristische Gleichung".
Diese Gleichung <u>n</u>-ten Grades in α hat im allgemeinen n verschiedene Wurzeln z. B.: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Demnach haben wir für unsere Gleichung <u>n</u> partikuläre Lösungen

$$y = e^{\alpha_1 x}, \quad y = e^{\alpha_2 x}, \quad \dots\dots, \quad y = e^{\alpha_n x}.$$

Aus diesen partikulären Lösungen lässt sich dann eine allgemeine Lösung aufbauen von der Form

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 x} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 x} + \dots\dots\dots + C_n \cdot e^{\alpha_n x},$$

die bereits die gesuchten <u>n</u> willkürlichen Konstanten enthält.
Wir haben solcherweise die allgemeine Lösung gefunden.
Sollten unter den Wurzeln α imaginäre vorhanden sein, die dann paarweis konjugiert auftreten, so wird man nach der Eulerschen Formel die imaginären Bestandteile zu

sin- und cos- Gliedern zusammenziehen können.

Nun kann aber der Fall eintreten, daß verschiedene Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammenfallen, wo sei z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$, so daß $e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x}$ ist. In diesem Falle können wir die allgemeine Lösung nicht mehr aufstellen, da eine der willkürlichen Konstanten wegfiele.

Da hilft uns nun der folgende allgemeine Satz:

Wenn λ eine ρ fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist, dann vermag man sofort ρ partikulären Lösungen anzugeben ~~an~~-zugeben, nämlich

$$y = e^{\lambda x}, \quad y = x\cdot e^{\lambda x}, \quad \underline{y = x^2 e^{\lambda x}}, \; \ldots\ldots \; y = x^{\rho-1}\cdot e^{\lambda x}.$$

Für den speziellen Fall der Doppelwurzel, sagt dieser Satz aus, daß nicht nur

$y = e^{\lambda x}$, sondern auch $y = x\cdot e^{\lambda x}$

eine partikuläre Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Für diesen besonders einfachen Fall soll der Beweis geführt werden.

<u>Beweis:</u>

Nach dem Fundamentalsatze der Algebra ist für den Fall einer Doppelwurzel außer

$f(\lambda) = 0$ auch $f'(\lambda) = 0$.

$f'(\lambda)$ ist aber gleich

$$f'(\lambda) = \left(a \cdot n \cdot \lambda^{n-1} + b(n-1) \cdot \lambda^{(n-2)} + \dots\dots + m\right) = 0.$$

Nach dem oben ausgesprochenen Satze, soll nun

$$y = x \cdot e^{\lambda x}$$

eine partikuläre Lösung unserer Differentialgleichung sein.

Wir setzen daher diesen Wert in unsere Differentialgleichung ein, welche, da

$$\begin{aligned}
y' &= \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot x + e^{\lambda x} \\
y'' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \cdot x + 2\lambda e^{\lambda x} \\
y''' &= \lambda^3 \cdot e^{\lambda x} \cdot x + 3 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} \\
&\vdots \\
y^n &= \lambda^n \cdot e^{\lambda x} \cdot x + n \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

sind, die Gestalt annimmt

$$\left\{\begin{array}{ll} a \cdot \lambda^{n} \cdot e^{\lambda x} \cdot x & + \; a \cdot n \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} \\ + \, b \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} \cdot x & + \; b(n-1) \cdot \lambda^{n-2} \cdot e^{\lambda x} \\ + \; \ldots \ldots \ldots & + \; \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ + \, m \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot x & + \; m \cdot e^{\lambda x} \\ + \, n \cdot e^{\lambda x} \cdot x & \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$e^{\lambda x} \cdot x \cdot f(\lambda) + e^{\lambda x} \cdot f'(\lambda) = 0.$$

da sowohl

$$f(\lambda) = 0$$

wie

$$f'(\lambda) = 0$$

sind, so ist diese Gleichung richtig, mithin der Beweis geliefert.

Für eine ρ fache Wurzel würde der Beweis genau so weitergehen.

daß der Satz auch dann allgemein gilt, wenn verschiedene Wurzeln der Gleichung in verschiedener Anzahl mehrfach auftreten, liegt auf der Hand.

Da die Summe der Multiplizitäten, mit der die verschiedenen Wurzeln einer Gleichung <u>n.</u> ten Grades auftreten, nach dem Fundamentalsatz der Algebra zusammen gerade wieder <u>n</u> ergiebt, da wir ferner so viele partikulären Lösungen haben, als die Multiplizität dieser Lösungen anzeigt, so haben wir insgesamt <u>n</u> partikuläre Lösungen zusammen und können aus diesen uns eine allgemeine Lösung aufbauen.

Wir werden die so gewonnenen Erscheinungen benutzen, um als Beispiel eine Gleichung zweiten Grades durchzusprechen, nämlich die Gleichung der „kleinen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage“ unter Berücksichtigung der

Dämpfung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\kappa \cdot \frac{dy}{dt} + \sigma^2 \cdot y = 0,$$

wobei wir nicht nur σ^2, sondern auch κ als positiv voraussetzen.

Das Glied $\sigma^2 y$ gibt die elastische Kraft an, mit der der bewegte Körper in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird. Das Glied $2\kappa \cdot \frac{dy}{dt}$ stellt die Dämpfung vor.

Die obige Gleichung ist die Gleichung für die sog. „freien" Schwingungen. Für die sog. „erzwungenen" Schwingungen tritt noch in der Gleichung ein Glied $f(t)$ auf, so daß diese lautet

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\kappa \cdot \frac{dy}{dt} + \sigma^2 \cdot y = f(t)$$

Wir betrachten zunächst die freien Schwingungen. Als partikuläre Lösung der gegebenen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\kappa \cdot \frac{dy}{dt} + \sigma^2 \cdot y = 0$$

setzen wir an

$$y = e^{\lambda t},$$

und wird man für λ die charakteristische Gleichung finden

$$\lambda^2 + 2\kappa\cdot\lambda + \sigma^2 = 0,$$

die zwei Wurzeln liefert

$$\lambda_1 = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2}$$

$$\lambda_2 = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2}$$

Es sind hier drei besondere Fälle möglich, daß nämlich 1.) $\kappa^2 > \sigma^2$, 2.) $\kappa^2 = \sigma^2$, 3.) $\kappa^2 < \sigma^2$ ist. Alle drei Fälle haben wir zu diskutieren.

1.) die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind beide reell, es läßt sich aus den beiden partikulären Lösungen

$$y = e^{(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2})\cdot t} \quad \text{und} \quad y = e^{(-\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2})\cdot t}$$

die allgemeine Lösung herstellen

$$y = a_1\cdot e^{(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2})\cdot t} + a_2\, e^{(-\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \sigma^2})\cdot t}.$$

Da beide Exponenten negativ sind so gehen beide Glieder der rechten Seite mit wachsendem

t gegen Null, also auch der Ausschlag y selbst. Die Bewegung ist aperiodisch, es liegt der Fall der starken Dämpfung vor.

2.) Ist $\kappa^2 = \sigma^2$, so ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\kappa.$$

Es liegt der Fall der Doppelwurzel vor und wir haben die beiden partikulären Lösungen

$$y_1 = e^{-\kappa \cdot t} \quad \text{und} \quad y_2 = t \cdot e^{-\kappa \cdot t},$$

die wir zu der allgemeinen Lösung

$$y = a \cdot e^{-\kappa t} + b \cdot t \cdot e^{-\kappa t}$$

zusammensetzen können.

Daß hierin das erste Glied rechts mit wachsendem t gegen Null geht, sieht man sofort. Aber auch in dem zweiten Gliede wird mit wachsendem t der Faktor $e^{-\kappa t}$ viel rascher abnehmen, als der Faktor t zunimmt, was der Charakter der Exponentialfunktion sofort wahrscheinlich macht. Auch hier ist die Bewegung also aperiodisch und verläuft mit wachsendem t asymptotisch gegen Null.

3.) Ist $\varkappa^2 < \sigma^2$, so wird die Wurzel imaginär, und wir haben

$$\lambda_1 = -\varkappa + i\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}$$
$$\lambda_2 = -\varkappa - i\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2},$$

und also sind die partikulären Lösungen

$$y_1 = e^{-\varkappa t + i\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t} \text{ und}$$
$$y_2 = e^{-\varkappa t - i\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t}$$

Nun ist aber nach der Eulerschen Formel

$$e^{\pm i\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t} = \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right) \pm i\cdot\sin\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right),$$

und also nehmen unsere partikulären Lösungen die Gestalt an

$$y_1 = e^{-\varkappa t}\left[\cos\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right) + i\sin\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right)\right]$$

und

$$y_2 = e^{-\varkappa\cdot t}\left[\cos\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right) - i\cdot\sin\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right)\right]$$

Diese ziehen wir zusammen zu

$$\frac{y_1+y_2}{2} = e^{-\varkappa t}\cdot\cos\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right)$$

und $$\frac{y_1-y_2}{2i} = e^{-\varkappa t}\cdot\sin\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t\right).$$

und haben so die allgemeine Lösung

$$y = C_1 \cdot e^{-\varkappa . t} \cos(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t) + C_2\, e^{-\varkappa . t} \cdot \sin(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot t)$$

oder in anderer Form

$$y = C \cdot e^{-\varkappa . t} \cdot \sin\left[\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\,(t-t_0)\right],$$

(nach einer früher von uns durchgeführten Umrechnung. cf. pg. 54–55).

Die Grösse $C \cdot e^{-\varkappa . t}$ giebt die Amplitude der Schwingung an, t_0 ist die Phase der Schwingung. Der zweite Faktor $\sin\left[\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\,(t-t_0)\right]$ hat immer denselben Wert, wenn t um 2π vorgeschritten ist, er ändert im Intervalle 2π zweimal sein Vorzeichen. Wir haben also eine periodische Bewegung. !

Die Schwingungsdauer T bestimmt sich durch die Gleichung

$$\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot T = 2\pi$$

oder

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}}$$

Wir haben also eine Schwingung von gegebener Schwingungsdauer, aber beliebiger

Phase und von einer Amplitude, die beliebig gegeben sein kann und sich im Verlaufe der Bewegung asymptotisch der Null nähert.

Der Einfluss der Dämpfung besteht nicht nur darin, dass die Amplitude der Schwingung allmählich abnimmt, sondern zeigt sich auch darin, dass die Schwingungsdauer ~~etwas~~ vergrössert ist.

Die ganze Art der Bewegung lässt eine einfache geometrische Deutung zu.

Wir denken uns im (Y, x) System Polarkoordinaten in der Weise eingeführt, dass wir haben

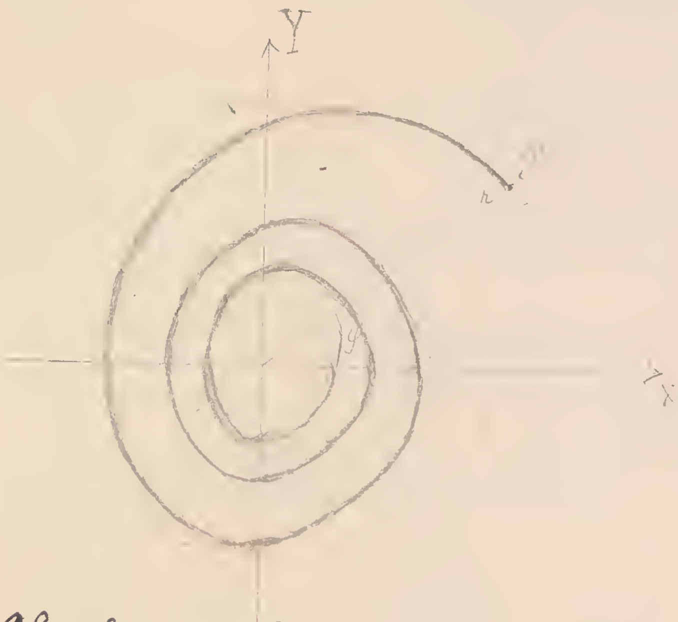
$$r = C \cdot e^{-\kappa t}$$

$$\varphi = \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2} \cdot t,$$

so dass $y = r \cdot \sin \varphi$ ist.

Um uns nun die Abhängigkeit des auf der Y Achse hin und her schwingenden Punktes von der Zeit anschaulich darzustellen, nehmen wir in der (Y, x) Ebene einen Hülfspunkt an, der die Koordinaten $r = C \cdot e^{-\kappa . t}$, $\varphi = \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2} \cdot t$ be-

sieht, und denken uns diesen Hilfspunkt, während er seine Bewegung vollführt, immer auf die Y Achse projiziert und beobachten die Bewegung des projizierten Punktes auf der Y Achse.



die Gleichung der Kurve ist die einer logarithmischen Spirale

$$r = C \cdot e^{-\kappa \cdot t}$$

die mit konstanter Geschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2}$$

durchlaufen wird.

Wir bekommen so ein sehr anschauliches Bild vom Verlaufe der Bewegung.

Um die maximalen Werte des Ausschlages zu finden, haben wir die Gleichung für y zu differenzieren.

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$y' = r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \varphi'$$

$$= r \cdot \left(-\varkappa \cdot \sin\varphi + \sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2} \cdot \cos\varphi\right) = 0$$

Als Bedingung für das Maximum finden wir also

$$-\varkappa \cdot \sin\varphi + \sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2} \cdot \cos\varphi = 0$$

oder

$$\operatorname{ctg}\varphi_0 = \frac{\varkappa}{\sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2}} > 0.$$

Daraus folgt:

Die größten Ausschläge von y nach der positiven oder negativen Seite hin entsprechen einem Winkel φ_0, der kleiner ist als 90° bezw. $(90^\circ + n \cdot \pi)$

Wir gehen nunmehr über zur Betrachtung der erzwungenen Schwingungen, deren Gleichung lautet

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\kappa \cdot \frac{dy}{dt} + \sigma^2 \cdot y = f(t)$$

Bei der Lösung dieser Gleichung kommt es uns sehr zu statten, dass wir die Gleichung der freien Schwingungen (ohne das Glied rechts) bereits gelöst haben. Angenommen, wir hätten hierfür die beiden partikulären Lösungen y_1 und y_2 gefunden, so konnten wir die zu der allgemeinen Lösung

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$$

zusammenfassen.

Nun wollen wir annehmen, wir hätten unserer jetzt gegebenen Differentialgleichung irgend eine partikuläre Lösung Y gefunden. Dann erhält man die allgemeine Lösung, wenn zu dieser partikulären Lösung Y

die allgemeine Lösung der Gleichung der freien Schwingungen $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ addiert. Also

$$y = Y + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Der Beweis ergiebt sich durch Einsetzen der Formel in die Differentialgleichung.

In seiner physikalischen Bedeutung können wir den Satz folgendermaßen aussprechen.

„Man bekommt die allgemeinen gezwungenen Schwingungen, wenn man über eine erste beliebig herausgegriffene gezwungene Schwingung die allgemeine freie Schwingung überlagert."

Nach dieser allgemeinen Überlegung wollen wir nun zusehen, wie wir etwa eine solche partikuläre Lösung Y finden können.

Zunächst setzen wir über die Funktion $f(t)$ nichts voraus, sondern lassen sie vollkommen beliebig sein. Hier wollen wir eine Methode verwenden, die man die „Variation der

Konstanten" nennt.

Wenn die Gleichung der freien Schwingungen, die wir früher betrachtet haben, erfüllt wurde von der Lösung

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2,$$

so mag die jetzige Gleichung der erzwungenen Schwingungen erfüllt werden von einer Lösung

$$y = C_1(t) \cdot y_1 + C_2(t) \cdot y_2,$$

wo wir die Konstanten als Funktionen der Zeit, also variabel auffassen.

Aus dem Werte

$$y = C_1(t) \cdot y_1 + C_2(t) \cdot y_2$$ gewinnen wir

$$y' = C_1 \cdot y_1' + C_2 y_2' + C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2$$ und

$$y'' = C_1 \cdot y_1'' + C_2 \cdot y_2'' + 2C_1' \cdot y_1' + 2C_2' \cdot y_2' + C_1'' y_1 + C_2'' y_2$$

Diese so gewonnenen Werte # müssen wir in die Differentialgleichung einsetzen,

welche dadurch folgende Gestalt annimmt:

$$C_1(y_1'' + 2k\cdot y_1' + \sigma^2\cdot y_1) + C_2(y_2'' + 2k\cdot y_2' + \sigma^2\cdot y_2)$$
$$+ 2k(C_1'\cdot y_1 + C_2' y_2) + \cancel{\sigma^2}(2C_1' y_1' + 2C_2' y_2' + C_1''\cdot y_1$$
$$+ C_2''\cdot y_2) = f(t)$$

Da y_1 und y_2 partikuläre Lösungen der Differentialgleichung der freien Schwingungen sind, so ergeben die beiden ersten Klammerausdrücke je Null, und die beiden ersten Terme fallen damit von selbst weg.

Da nun ferner die unbekannten Funktionen C_1 und C_2 nur eine einzige Gleichung befriedigen sollen, so wird es gestattet sein, sie noch einer zweiten Bedingung zu unterwerfen, die wir so wählen, daß die ferneren Rechnungen möglichst einfach werden. Im vorliegenden Falle wählen wir diese Bedingung am besten so, daß unsere dritte

Term auch noch wegfällt, also

1.) $$C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0$$

Wenn wir diese Gleichung differenzieren, so ergiebt sich

$$C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' + C_1'' \cdot y_1 + C_2'' \cdot y_2 = 0.$$

Unser weiteres, einzig noch übriges Term reduziert sich dadurch auf folgenden Ausdruck

2.) $$C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = f(t)$$

Unser Ansatz, daß

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

sein sollte, befriedigt wirklich unsere Differentialgleichung, wenn die Formeln 1.) und 2.) stattfinden.

C_1 und C_2 sind also aus den beiden Gleichungen

$$C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0$$
$$C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = f(t)$$

zu bestimmen, woraus sich ergiebt

$$C_1'(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1') = -\, y_2 \cdot f(t)$$

und

$$C_2'(y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1') = +\, y_1 \cdot f(t)$$

Hieraus bestimmen sich die Größen C_1 und C_2 durch einfache Quadratur folgendermaßen, wenn ich die Grenzen von t_1 bis t, bezw. von t_2 bis t wähle und den Integrationsbuchstaben τ (um Verwechselung mit der Grenze t zu verhüten) einführe,

$$C_1 = \int_{t_1}^{t} \frac{-\, y_2 \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'}$$

und

$$C_2 = \int_{t_2}^{t} \frac{+\, y_1 \, f(\tau) \cdot d\tau}{y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'}$$

Nun bleibt noch übrig für y_1 und y_2 die frühere

gefundenen Werte einzusetzen. Wir hatten bestimmt (S. 83.)

$$y_1 = e^{-\kappa\tau} \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right)$$

und

$$y_2 = e^{-\kappa\tau} \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right)$$

Also sind die Differentialquotienten

$$y_1' = e^{-\kappa\tau}\left[-\kappa \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) - \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) \sqrt{\sigma^2-\kappa^2}\right]$$

und

$$y_2' = e^{-\kappa\tau}\left[-\kappa \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) + \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) \cdot \sqrt{\sigma^2-\kappa^2}\right].$$

Demnach bestimmt sich die Determinante

$$y_1 \, y_2' - y_2 \cdot y_1' = e^{-2\kappa\tau} \cdot \sqrt{\sigma^2-\kappa^2}$$

Wenn wir alle diese Werte unter den Integralzeichen einsetzen, so nehmen ~~f~~ diese folgendes Aussehen an

$$C_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{\kappa\tau} \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}}$$

und

$$C_2 = \int_{t_0}^{t} - \frac{e^{\kappa\tau} \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}}$$

Nun wollen wir noch die untere Grenze statt t_1 bezw. t_2 gleich 0 setzen und dafür die Konstanten c_1 bezw. c_2 addieren, so daß wir haben

$$C_1 = \int_0^t \frac{e^{\varkappa\tau} \cdot \sin(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2} \cdot \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}} + c_1$$

und

$$C_2 = \int_0^t -\frac{e^{\varkappa\tau} \cdot \cos(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2} \cdot \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}} + c_2$$

Die allgemeine Lösung unserer Gleichung haben wir nun in folgender Form

$$y = y_1 \cdot \int_0^t \frac{e^{\varkappa\tau} \cdot \sin(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2} \cdot \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}}$$
$$- y_2 \cdot \int_0^t \frac{e^{\varkappa\tau} \cdot \cos(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2} \cdot \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}}$$
$$+ c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 .$$

Nun hatten wir früher (S. 88) als Lösung einer Gleichung angesetzt von der Form

$$y = Y + c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 ,$$

wobei Y unbekannt war.

Jetzt haben wir mit Hülfe der beiden letzten Gleichungen das Y bestimmt und zwar zu:

$$Y = y_1 \cdot \int_0^t \frac{e^{\kappa\tau} \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}\,\tau\right) f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}}$$

$$- y_2 \cdot \int_0^t \frac{e^{\kappa\tau} \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}}$$

Wenn wir hier für y_1 und y_2 noch die früheren Werte einsetzen und alles unter ein Integralzeichen ziehen, so erhalten wir

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}} \cdot \int_0^t d\tau \cdot f(\tau) \cdot \Big[e^{\kappa\tau} \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}\, t\right) \cdot e^{-\kappa t}$$
$$- e^{\kappa\tau} \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot \tau\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\kappa^2} \cdot t\right) \cdot e^{-\kappa t} \Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}} \int_0^t - e^{\kappa(\tau-t)} \cos\left[\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}\,(\tau+t)\right] f(\tau)\, d\tau.$$

Wir formulieren unser Resultat so:

Versteht man unter $\overline{Y}$ das Integral

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}} \cdot \int_0^t e^{\kappa(\tau-t)} \cdot \cos\left[\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}\,(\tau+t)\right] f(\tau) \cdot d\tau,$$

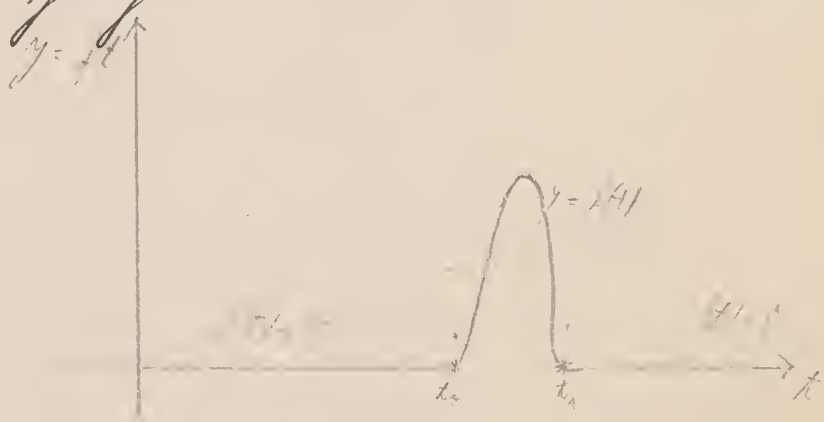
versteht man ferner unter y_1 und y_2 2 partikulare Lösungen der Differentialgleichung der freien Schwingungen, dann ist die allgemeine

en Lösung der gegebenen Differentialgleichung der gezwungenen Schwingungen

$$y = Y + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

Wir wollen nun diese Formel noch ein wenig diskutieren, indem wir bestimmte Annahmen über $f(t)$ machen.

Nur in einem bestimmten Intervalle sei $f(t)$ von 0 verschieden, z. B. v. t_0 bis t_1, sonst überall gleich 0.



Ist

$t < t_0$, so ist auch

$f(t) = 0$, mithin auch das

$\int (\text{———}) \cdot dt = 0.$

Wir haben also freie Schwingungen. ($y = c_1 y_1 + c_2 y_2$)
Ist aber

$t > t_1$, so ist der Wert des Integrals derselbe, als wenn das Integral nur bis t_1 liefe, da jenseits von t_1 $f(t)$ wieder gleich 0 ist.
also

$$\int_0^t (\text{——}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\text{——}) dt = \text{const.}$$

Die Schwingungen sind nach der Wirkung der von außen herankommenden Kraft, die nur in dem Zeitintervall von t_0 bis t_1 wirksam war, wieder freie Schwingungen, aber ihre Gleichung ist nunmehr

$$y = (c_1 + \gamma_1) \cdot y_1 + (c_2 + \gamma_2) \cdot y_2,$$

wo

$$\gamma_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^{\varkappa\tau} \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2} \cdot \tau\right) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2}}$$

und

$$\gamma_2 = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{e^{\varkappa\tau} \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2} \cdot \tau\right) \cdot f(\tau) \cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2}}$$

sind.

Wenn wir uns nun vorstellen, das Zeitintervall $t_0 - t_1$ nur ein unendlich kleines Element $d\tau$ lang wäre, so werden die Konstanten $\gamma_1 = dc_1$ und $\gamma_2 = dc_2$, wo dc_1 und dc_2 direkt gleich den Incrementen sind,

$$dc_1 = \frac{f(\tau)\cdot e^{\varkappa\tau}\cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\,\tau\right)d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}}$$

$$dc_2 = -\frac{f(\tau)\cdot e^{\varkappa\tau}\cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}\cdot\tau\right)\cdot d\tau}{\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2}}$$

während γ_1 und γ_2 gleich den Integralen über diese Incremente wären. y ist dann bestimmt durch die Gleichung

$$y = (c_1 + dc_1)\cdot y_1 + (c_2 + dc_2)\,y_2$$

Da nun die Mechanik das Produkt aus einer Kraft $f(\tau)$ und dem unendlich kleinen Zeitelemente $d\tau$ ~~als~~, $f(\tau)\cdot d\tau$, als „Stoß" bezeichnet, so können wir unserem Ansatz folgende mechanische Bedeutung beilegen:

„Wenn unser Punkt die freien Schwin-

-gungen

$$y = c_1 y_1 + c_2 \cdot y_2$$

vollführt und nun plötzlich einen Stoß $f(\tau)\cdot d\tau$ während des unendlich kleinen Zeitelementes $d\tau$ erleidet, so vollführt er hinterher seine Schwingungen nach der Gleichung

$$y = (c_1 + dc_1)\cdot y_1 + (c_2 + dc_2)\cdot y_2,$$

wo dc_1 und dc_2 durch die oben angegebenen Gleichungen bestimmt sind.

Als wir eine stetig wirkende Kraft $f(t)$ angenommen hatten, da hatten wir die Gleichung der gezwungenen Schwingung

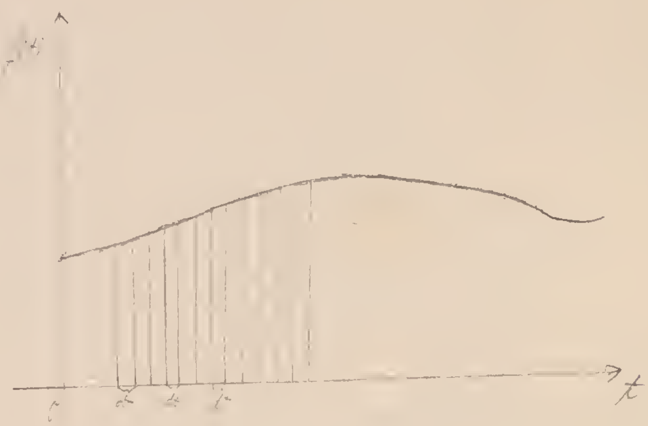
$$y = (c_1 + C_1)\cdot y_1 + (c_1 + C_2)\cdot y_2,$$

und hierin waren die Konstanten C_1 und C_2 gleich den Integralen von 0 bis t über die Inkremente, die wir gleich dc_1 bezw. dc_2 gesetzt haben. Es sind also

$$C_1 = \int_0^t dc_1$$

und $$C_2 = \int_0^t dc_2$$

Wir wollen uns nun die Bewegung im $(t, f(t))$ System geometrisch darstellen.



Im Momente $t=0$, sind auch $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$, und also ist in diesem Momente

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$$

die Gleichung der verschwindenden freien Schwingung.

Wenn wir nun unser Zeitintervall auf der t-Achse in unendlich viele unendlich kleine dt zerlegen, so können wir die ferneren Bewegungen erschliessen, dass in jedem Zeitmomente dt die zu Anfang des Zeitmomentes geltenden Konstanten c_1 und c_2 und die dem Zeitelemente dt entspre-

schiedenen Zeitmomente $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_2$ vermehrt worden, wodurch, über das ganze Intervall hin genommen, die verschiedenen Zuwüchse $d\varepsilon_1$ und $d\varepsilon_2$ sich summieren zu den Integralen

$$\varepsilon_1 = \int_0^t d\varepsilon_1$$

und

$$\varepsilon_2 = \int_0^t d\varepsilon_2 \,.$$

Diese Auffassung, dass es sich bei der gezwungenen Bewegung um eine freie Bewegung handelt, deren Konstanten geändert worden, das ist der allgemeine Gedanke bei unserer Methode, die wir darum die „Variation der Konstanten" genannt haben

Jetzt haben wir den Fall zu betrachten, dass die äußere Kraft selbst periodisch wirkt, also die Bewegung eben der Gleichung genügt

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\kappa\frac{dy}{dt} + \sigma^2 y = P\,\sin pt.$$

Als Partikularlösung suchen wir eine Sinusschwingung von gleicher Frequenz an z. B.

$$y = C \cdot \sin\left(p\,(t-\tau)\right)$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung ein und sehen zu, welchen Bedingungen die Amplitude C und die Phase τ unserer Partikularlösung noch genügen müssen, um die gegebene Differentialgleichung zu befriedigen.

Die Differentialgleichung lautet dann

$$C\left[-p^2 \cdot \sin\left(p(t-\tau)\right) + 2\varkappa p \cdot \cos\left(p(t-\tau)\right) + \sigma^2 \cdot \sin\left(p(t-\tau)\right)\right] = P \cdot \sin pt$$

oder

$$\begin{aligned} C \cdot \Big[& -p^2 \cdot (\sin pt \cdot \cos p\tau - \cos pt \cdot \sin p\tau) \\ & + 2\varkappa p\,(\cos pt \cdot \cos p\tau + \sin pt \cdot \sin p\tau) \\ & + \sigma^2 (\sin pt \cdot \cos p\tau - \cos pt \cdot \sin p\tau)\Big] \\ & = P \cdot \sin pt \end{aligned}$$

oder.

$$\sin pt\,(-Cp^2\cos p\tau + 2\kappa p\cdot C\sin p\tau + \sigma^2 C\cos p\tau - P)$$

$$+\ C\cdot\cos pt\,(p^2\cdot\sin p\tau + 2\kappa p\cdot\cos p\tau - \sigma^2\cdot\sin p\tau) = 0$$

Diese Gleichung wird sicher dann identisch in t befriedigt, wenn beide Terme für sich 0 ergeben. Wir machen daher diesen Versuch der Lösung, daß wir die beiden Terme je für sich gleich Null setzen und wollen sehen, ob der Versuch gelingt.

1) $C(-p^2\cdot\cos p\tau + 2\kappa p\cdot\sin p\tau + \sigma^2\cdot\cos p\tau) = P$

2) $p^2\cdot\sin p\tau + 2\kappa p\cdot\cos p\tau - \sigma^2\cdot\sin p\tau = 0$

Aus diesen beiden Gleichungen müssen sich, wenn unser Versuch zur Lösung gelingen soll, die Amplitude C und die Phase τ der Schwingung berechnen lassen.

Wenn ich die Gleichung 1) mit $\sin p\tau$, die Gleichung 2) mit $C\cdot\cos p\tau$ multipliziere und dann beide addiere, so ergibt sich

$$a.)\ 2\varkappa p \cdot C = P \cdot \sin p\tau.$$

Multipliziere ich die Gleichung 1.) mit $-\cos p\tau$, die Gleichung 2.) mit $C \cdot \sin p\tau$ und addiere nun beide, so ergibt sich

$$b.)\ C(p^2-\sigma^2) = -P \cdot \cos p\tau$$

Wenn ich die Gleichungen a.) und b.) quadriere und dann beide addiere, so bestimmt sich C durch die Gleichung

$$C^2\left[(p^2-\sigma^2)^2+4\varkappa^2p^2\right] = P^2$$

oder

$$\underline{\underline{C = \frac{P}{\sqrt{(p^2-\sigma^2)^2+4\varkappa^2p^2}}}}.$$

Nun bestimmen sich leicht weiter

$$\underline{\underline{\sin p\tau = \frac{2\varkappa p}{\sqrt{(p^2-\sigma^2)^2+4\varkappa^2p^2}}}}$$

und

$$\underline{\underline{\cos p\tau = -\frac{p^2-\sigma^2}{\sqrt{(p^2-\sigma^2)^2+4\varkappa^2p^2}}}}$$

Unser Versuch zur Lösung ist also geglückt.

Wenn die äußere Kraft einem Sinus proportional ist, so gibt es also eine Partikularlösung von derselben Periode und von einer Amplitude und Phase, die berechnet werden können.

Aus dieser Partikularlösung entsteht die allgemeine Lösung, wenn ich die freie Schwingung $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ überlagere, also

$$y = C \cdot \sin p(t-\tau) + c_1 \cdot e^{-\varkappa t} \cdot \cos\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-\varkappa t} \cdot \sin\left(\sqrt{\sigma^2-\varkappa^2} \cdot t\right)$$

Man nennt diese Partikularlösung,

$$y = C \cdot \sin p(t-\tau),$$

mit der wir begannen auch wohl „die erzwungene Schwingung" κατ' ἐξοχήν, weil im vorliegenden Falle im Laufe der Zeit allein übrig bleibt, indem die von vornherein daneben vorhandenen freien Schwingungen infolge der Dämpfung abklingen. (Der zweite und dritte Term gehen mit wachsendem t gegen Null.)

Wir können diese Betrachtungen sofort verallgemeinern, wenn auf der rechten Seite nicht ein einzelnes Sinusglied steht, sondern eine Summe von Sinusgliedern, die wir, um nicht mit Konvergenzbetrachtungen in Konflikt zu kommen, einfach als endlich ansehen.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varkappa \cdot \frac{dy}{dt} + \sigma^2 \cdot y = \sum_\nu P_\nu \cdot \sin p_\nu t$$

Wir ~~können~~ würden wieder eine Partikularlösung

$$y = \sum_\nu C_\nu \cdot \sin p_\nu (t - \tau_\nu)$$

ansetzen können und es würden sich ergeben

$$C_\nu = \frac{P_\nu}{\sqrt{(p_\nu^2 - \sigma^2)^2 + 4\varkappa^2 p_\nu^2}}$$

und

$$\cos p_\nu \tau_\nu = -\frac{p_\nu^2 - \sigma^2}{\sqrt{(p_\nu^2 - \sigma^2)^2 + 4\varkappa^2 p_\nu^2}}$$

$$\sin p_\nu \tau_\nu = \frac{2\varkappa p_\nu}{\sqrt{(p_\nu^2 - \sigma^2)^2 + 4\varkappa^2 p_\nu^2}}$$

Als allgemeine Lösung würden wir wieder haben

$$y = \sum_\nu C_\nu \cdot \sin p_\nu (t - \tau_\nu) + c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$$

Wir fassen zusammen:

Wird die äußere Kraft durch eine Summe trigonometrischer Terme vorgestellt, so bekommen wir als Partikularlösung ebenfalls eine Summe trigonometrischer Terme, deren Inbegriff wir wieder „die gezwungene Schwingung" nennen, und der wir, um die allgemeine Lösung zu haben, wieder eine freie Schwingung überlagern müssen.

—:||:—

Der Einfachheit halber sehen wir im folgenden jedoch wieder von diesen Verallgemeinerungen ab und setzen die rechte Seite gleich dem einfachen Sinusgliede.

Wir stellen die Frage, wann wird die Amplitude C der gezwungenen Schwingung am größten?

Die Antwort darauf lautet:

„Wenn die Periode der ~~freien~~ Schwingung mit der Periode der Kraft übereinstimmt."

d. h. wenn der „Fall der Resonanz" vorliegt.
Die Erscheinung der Resonanz findet in der Formel

$$y = C \cdot \sin p(t-\tau)$$

ihren mathematischen Ausdruck.
Wir haben zunächst den Ausdruck $\frac{C}{P}$, die „Grösse der Resonanz", zu berechnen.
Hinsichtlich der gegebenen Grössen σ und κ machen wir noch die Voraussetzung

$$2\kappa^2 < \sigma^2$$

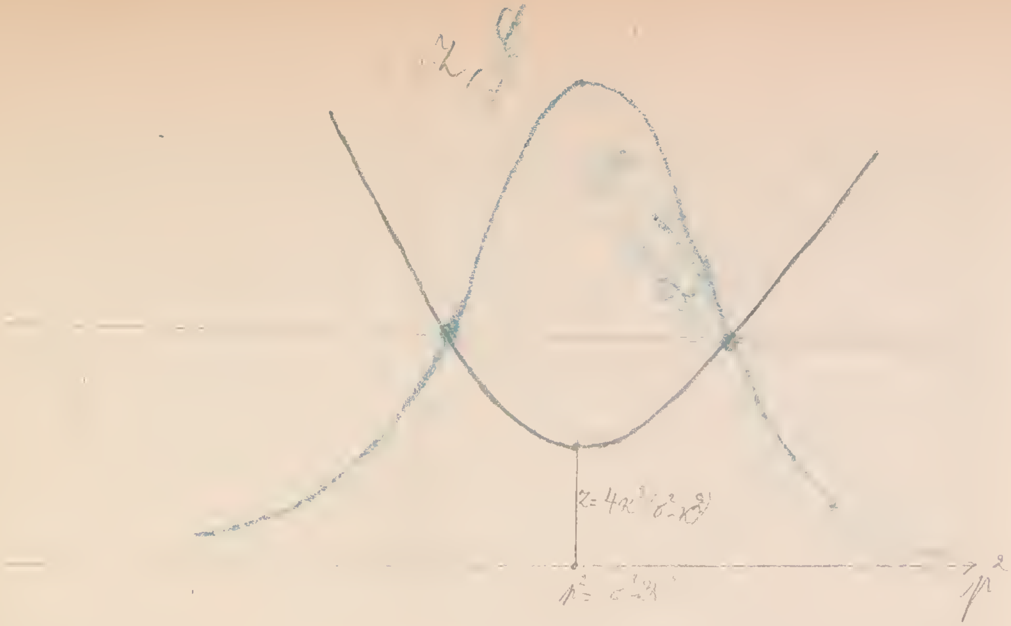
und setzen nun

$$\frac{C}{P} = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

Dann ist

$$z = \left[(p^2-\sigma^2)^2 + 4\kappa^2 p^2\right] \quad (\text{cf. S. } 104).$$

Wir zeichnen uns die dieser Gleichung entsprechenden Kurven, indem wir p^2 als Abscisse, z als Ordinate auftragen. In diesem System stellt die Gleichung offenbar eine Parabel vor.



Suchen wir zunächst den Scheitel der Parabel. Wir haben zu dem Zwecke zu setzen

$$\frac{dz}{d(p^2)} = 0,$$

also

$$2.(p^2-\sigma^2) + 4\kappa^2 = 0$$

oder

$$\underline{p^2 = \sigma^2 - 2\kappa^2},$$

und da wir die Voraussetzung gemacht haben $\sigma^2 > 2\kappa^2$, so wird die Abscisse einen positiven Wert haben.

Die zugehörige Ordinate ist

$$z = 4\kappa^4 + 4\kappa^2(\sigma^2 - 2\kappa^2)$$

oder $\underline{z = 4\kappa^2(\sigma^2-\kappa^2)}$

Von diesem durch die beiden Koordinaten p^2 und z bestimmten Scheitelpunkte aus hebt sich die Parabel nach beiden Seiten stetig in die Höhe.

Die Minimalordinate

$$z = 4\kappa^2(\sigma^2-\kappa^2)$$

wird umso kleiner, je kleiner das κ^2 bei gegebenem σ^2 ist, und würde, wenn die Dämpfung ganz verschwände, wenn also $\kappa = 0$ wäre, ebenfalls gleich Null sein.

Zeichnen wir uns nun, in demselben System die eigentlich gesuchte Kurve

$$\frac{C}{P} = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

An den Punkten $z = 1$ ist auch $\frac{C}{P} = 1$, die Punkte der Kurven z und $\frac{1}{\sqrt{z}}$ fallen hier zusammen.

An der Stelle

$$p^2 = 2(\sigma^2-2\kappa^2)$$

hat die Kurve z die Ordinate

$$z = 4\kappa^2(\sigma^2-\kappa^2) \quad (\text{Minimum}).$$

Also hat hier die Kurve $\frac{f_i}{f_a}$ die Maximal-ordinate

$$\frac{C}{P} = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\sigma^2-\kappa^2}}.$$

Hier ist also die Breite der Resonanz am größten ($p^2 = \sigma^2 - 2\kappa^2$), und nimmt ab, wenn wir nach rechts oder nach links gehen.

Die stärkste Resonanz tritt nicht ein, wenn die Periode der äußeren Kraft gleich ist der Periode der ~~äußeren~~ freien Schwingung, sondern wenn sie etwas größer ist.

Wäre $\kappa^2 = 0$, dann würde das Maximum der Resonanz ∞ sein, und übrigens in diesem Falle die Periode der äußeren Kraft mit der Periode der Schwingungen genau zusammenfallen.

Betrachten wir jetzt die Phase der Resonanz. Wir benutzen eine der vorigen analoge graphische Darstellung, indem wir p^2 als Abscisse, $p \cdot \tau$ als Ordinate auftragen.

Die Phase ist bestimmt durch jede der beiden Gleichungen

$$\sin p\tau = \frac{2\kappa p}{\sqrt{(p^2-\sigma^2)^2+4\kappa^2p^2}}$$

und

$$\cos p\cdot\tau = -\frac{p^2-\sigma^2}{\sqrt{(p^2-\sigma^2)^2+4\kappa^2p^2}}$$

Ist $p^2 = 0$, so ist $\sin p\tau = 0$, $\cos p\tau = 1$, also ist $p\cdot\tau = 0$, unsere Kurve setzt im Nullpunkt ein.

Ist $p^2 = \sigma^2$, so ist $\sin p\tau = 1$, $\cos p\tau = 0$, also $p\tau = \frac{\pi}{2}$.

Ist schließlich $p^2 = \infty$, so ist $\cos p\tau = -1$, während sich $\sin p\tau = 0$ ergibt, also ist für $p^2 = \infty$ $p\cdot\tau = \pi$.

Hieraus ergeben sich in unserer mechanischen Vorstellungsweise folgende interessante Folgerungen:

Wenn p^2 sehr gering ist, die äußere Kraft also recht langsam schwingt, so ist die Phasendifferenz zwischen äußerer Kraft und Schwingung verschwindend klein.

Wenn die äußere Kraft ihr Maximum erreicht, so erreicht auch die erzwungene Schwingung ihr (zeitliches Maximum). die Schwingungen gehen synchron.

Wenn $p^2 = \sigma^2$ ist, so ist die Phasendifferenz gleich $\frac{\pi}{2}$, der Ausschlag kommt um ~~eine~~ $1/4$ Schwingung hinter der Kraft her.

Wenn schließlich p^2 sehr bedeutend geworden ist, also die äußere Kraft sehr rasch schwingt, so ist die Phasendifferenz gleich π, die Verspätung gleich $1/2$ Schwingung.

Wir haben gesehen, daß man auch eine solche Differentialgleichung, bei welcher rechts ein trigonometrisches Glied steht, immer durch Exponentialgrößen bzw. trigonometrische Größen integrieren kann.

Handelt es sich nun aber um kleine Schwingungen eines Systems mit 2 Freiheitsgraden, so wird man 2 simultane Differentialgleichungen von zwei Variabeln, die entweder ohne freies Glied sind, so daß wir freie Schwingungen haben, oder rechts freie Funktionen von t enthalten, die welche solche erzwungenen Schwingungen verlangen.

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2k_{11}\frac{dy_1}{dt} + 2k_{12}\cdot\frac{dy_2}{dt} + \delta_{11}^2\cdot y_1 + \delta_{12}^2 y_2 = 0 \text{ bzw. } = f_1(t)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + 2k_{21}\frac{dy_1}{dt} + 2k_{22}\frac{dy_2}{dt} + \delta_{21}^2 y_1 + \delta_{22}^2\cdot y_2 = 0 \text{ bzw. } f_2(t).$$

Auf solche Systeme simultaner Differentialgleichungen (mit 2 oder mehr abhängigen Variabeln) überträgt sich die bisherige Theorie

in leichter Verallgemeinerung, indem es nämlich gelingt, dass man für y_1 und y_2 geeignete Exponentialfunktionen oder geeignete trigonometrische Funktionen einsetzt. Wir gehen darauf hier deswegen nicht näher ein.

Als Litteratur (mit Übungsbeispielen) zu unseren Untersuchungen über die Gleichungen der kleinen Schwingungen mögen die Werke des Engländers Routh angegeben werden. Die hier erwähnten Probleme sind behandelt

Routh, Elementary rigid dynamics: Kap. 9.

und

Routh, Advanced rigid dynamics: Kap. 2, 3, 6, 7, 8.

Hiermit verlassen wir das Gebiet und gehen weiter in der allgemeinen Theorie

L. H.

Der Multiplikator.

Wir nehmen an, es sei eine Differential-gleichung in der einfachen Form

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

die wir umformen können in

$$M \cdot dx + N \cdot dy = 0$$

Eine solche Gleichung ist durch Quadratur einfach zu lösen, falls die linke Seite ein exaktes Differential vorstellt.

[Cf. hierzu und für das folgende: Klein, Differential- und Integralrechnung II, (Seit. 300–320)]

Für den Fall des exakten Differentials haben wir einfach

$$M \cdot dx + N \cdot dy = df(x,y).$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aber, dass ein exaktes Differential vorliegt, ist die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

durch Ausführung der Quadratur bestimmt sich

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\, d\eta + C_1$$

$$= \int_{y_0}^{y} N(x, \eta)\, d\eta + \int_{x_0}^{x} M(y_0, \xi)\, d\xi_1 + C_2$$

wenn ich um Verwechslungen mit der Grenze zu vermeiden, die Integrationsbuchstaben mit ξ, bezw. η bezeichne.

Da

$$df = 0$$

war, so ergiebt sich durch Quadratur sofort

$$f(x,y) = \text{Const};$$

als Gleichung der Integralcurven.

Denken wir uns die Fläche

$$z = f(x,y)$$

als Fläche im Raum modellirt, so sind die Curven $f = \text{Const}$ die <u>Projektionen der Niveaulinien</u> auf die XY Ebene, ein Fall, der früher eingehend behandelt ist.

Ist das Differential, das durch die Gleichung

$$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$$

vorgestellt wird, unecht, ist also

$$\frac{\partial M}{\partial y} \gtrless \frac{\partial N}{\partial x},$$

so könnte man wohl M und N mit einem gewissen Faktor μ multiplizieren, so daß

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu\cdot N}{\partial x}$$

würden, und wir dann also ein echtes Differential hätten.

Diesen Faktor μ werden wir, weil durch Multiplikation mit ihm die Quadratur möglich wird, den „*integrierenden Multiplikator*" nennen. Die Lehre von einem solchen integrierenden Multiplikator wurde in die mathematische Wissenschaft eingeführt von dem großen Leonhard Euler.

Zur Bestimmung des Multiplikators μ dient uns eben die Gleichung

$$\frac{\partial \mu \cdot M}{\partial y} = \frac{\partial \mu \cdot N}{\partial x},$$

woraus man durch differentiieren erhält

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

oder

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) + M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

Wir haben also für μ eine lineare partielle Differentialgleichung gefunden, und es möchte fast so scheinen, als wenn wir unser ursprünglich einfaches Problem einer gewöhnlichen Differentialgleichung auf das schwierigere einer partiellen Differentialgleichung zurückgeführt hätten.

Da wir ja aber von dieser partiellen Differentialgleichung gar nicht die allgemeine Lösung, sondern nur irgend eine partikuläre Lösung

zu kennen brauchen, so kann unter Umständen die Auffindung irgend eines so sich leichter gestalten, als die direkte Integration der vorgelegten Differentialgleichung.

Die Frage nach der Anwendung des Multiplikators wollen wir im Anschluß an ein Beispiel behandeln.

Beispiel:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Bei der Diskussion dieser Gleichung lassen wir zunächst die Multiplikatormethode vollkommen außer Acht und behandeln die Gleichung nach einer Methode, die ganz analog der früher von uns betrachteten Methode der Variation der Konstanten ist.

Hätten wir die Gleichung

$$y' + P(x) \cdot y = 0,$$

so könnten wir sofort die Variabeln separieren

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx.$$

Diese Gleichung ergiebt durch Quadratur

$$\log y = -\int^{x} P(\xi)\cdot d\xi + \text{Const.}$$

oder

$$y = e^{-\int^{x} P(\xi)\cdot d\xi}\cdot e^{\text{Const.}}$$

Setze ich hier $e^{\text{Const}} = K$,

so ist

$$y = K\cdot e^{-\int^{x} P(\xi)\cdot d\xi}$$

III.

In der zunächst vom vorigen ganz unabhängig gedachten Gleichung

$$y = K(x)\cdot e^{-\int^{x} P(\xi)\cdot d\xi}$$

soll K als Function von x aufgefaßt werden.

Wenn ich diese Gleichung nach x differenziere, so ergiebt sich

$$y' = -K(x)\cdot P(x)\cdot e^{-\int^{x} P(\xi)\cdot d\xi} + K'(x)\cdot e^{-\int^{x} P(\xi)\cdot d\xi}$$

Setze ich diese Werte von y und y' in unsere gegebene Differentialgleichung

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$$

ein, so findet sich
$$K'(x) \cdot e^{-\int^x P(\xi)\cdot d\xi} = Q(x).$$
Unser Ansatz wird also die gegebene Differentialgleichung befriedigen, wenn $K(x)$ so bestimmt ist, daß es der Differentialgleichung
$$K'(x) = Q(x)\cdot e^{+\int^x P(\xi)\cdot d\xi}$$
genügt.

Es bestimmt sich hieraus, durch Quadratur
$$K(x) = \int^x Q(\xi)\cdot e^{\int^\xi P(\xi_1) d\xi_1} \cdot d\xi + C.$$
und es ist also die Lösung
$$y = \left[C + \int^x Q(\xi)\cdot e^{\int^\xi P(\xi_1)\cdot d\xi_1}\cdot d\xi\right]\cdot e^{-\int^x P(\xi_1)\cdot d\xi_1}.$$

Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit zweitem Glied und beliebigen Koeffizienten wird solcherweise genau so durch Variieren der Konstanten erledigt, wie früher die Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Lösen wir die Gleichung nach C auf, so ist
$$f(x,y) = C = y\cdot e^{\int^x P(\xi_1)\cdot d\xi_1} - \int^x Q(\xi)\cdot e^{\int^\xi P(\xi_1)\cdot d\xi_1}\cdot d\xi$$

die allgemeinen Gleichung der Integralkurven, die wir als Projektionen D von Niveaukurven auf die (X Y) Ebene geometrisch interpretieren werden.

Nachdem wir so die Lösung unserer Differentialgleichung bereits kennen gelernt haben, wollen wir nun zusehen, wie wir dasselbe Resultat durch Einführung eines integrierenden Multiplikators hätten finden können. Zunächst wollen wir zusehen, wie der Multiplikator überhaupt aussehen muss. Um dies zu finden, haben wir nur unsere Gleichung für $f(x,y)$ total zu differenzieren. Es ergibt sich

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$$

$$0 = y\cdot P(x)\cdot e^{\int^x P(\xi_1)\,d\xi_1} - Q(x)\cdot e^{\int^x P(\xi_1)\,d\xi_1} + y'\cdot e^{\int^x P(\xi_1)\,d\xi_1}$$

oder

$$0 = e^{\int^x P(\xi)\,d\xi}\left(y' + P(x)\cdot y - Q(x)\right)$$

Da in der Klammer unser gegebenes ungeteiltes Differential steht, die ganze Gleichung aber

ein exactes Differential darstellt, so haben wir rückwärts gefunden, dass

$$e^{\int P(\xi)\cdot d\xi} = \mu$$

ein Multiplikator unserer Differentialgleichung sein muss.

Es ist nun zu untersuchen, wie können wir einen solchen Multiplikator μ finden, wenn uns unsere Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\cdot y = Q(x)$$

gegeben ist.

Wir formen unsere Gleichung zunächst um zu

$$[P(x)\cdot y - Q(x)]\cdot dx + dy = 0.$$

Da die allgemeine partielle Differentialgleichung für μ

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

lautete, so haben wir in unserem Falle für μ die Gleichung

$$\mu(P(x)) + (P(x)\cdot y - Q(x))\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$$

Jetzt braucht man nur den glücklichen Gedanken zu haben, nach einer Partikularlösung zu suchen, die allein von x abhängig ist, dann fällt der zweite Term der Gleichung $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ weg und man findet sofort

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \cdot P(x),$$

wo man die Variabeln sofort separieren kann.

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x) \cdot dx$$

oder

$$\log \mu = \int^{x} P(\xi)\, d\xi$$

oder

$$\mu = e^{\int^{x} P(\xi) \cdot d\xi}$$

Wir kommen also im vorliegenden Falle von der allgemeinen Multiplikatortheorie aus zu dem bereits vorher besprochenen Werte

$$\mu = e^{\int^{x} P(\xi) \cdot d\xi}$$

Um nun zur Lösung der Differentialgleichung

zu trennen, multiplizieren wir sie mit μ

$$e^{\int^x P(\xi)\cdot d\xi}\left[(P(x)\cdot y - Q(x))\cdot dx + dy\right] = 0$$

und können nun direkt die Integrationsformel

$$f(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\cdot d\eta + \int_{x_0}^{x} M(y_0,\xi)\cdot d\xi = Const.$$

worin wir noch speziell $y_0 = 0$ setzen wollen. Dann haben wir

$$f(x,y) = \int_0^y e^{\int^x P(\xi_1)\cdot d\xi_1}\cdot d\eta - \int_{x_0}^{x} Q(\xi)\cdot e^{\int^\xi P(\xi_1)\cdot d\xi_1}\cdot d\xi = Const.$$

oder

$$f(x,y) = e^{\int^x P(\xi_1)\cdot d\xi_1}\cdot y - \int_{x_0}^{x} (Q(\xi)\cdot e^{\int^\xi P(\xi_1)\cdot d\xi_1}\cdot d\xi = Const.$$

Nachdem wir also unseren Multiplikator μ gefunden haben, der nur von x abhängt, führt die reguläre Anwendung des μ ganz genau zu derjenigen Gleichung, die wir ursprünglich durch Variation der Konstanten gewonnen hatten und von der ausgehend wir uns den Multiplikator μ verschafft haben.

Daß sich solche Beispiele keine durchschnitt-
nen gewöhnlich sehr vereinfachen, wird man ersehen, wenn wir unseren Funktionen P und Q bestimmte Werte geben; Es seien z. B.

$$P = \frac{1}{x(1-x)} \text{ und } Q = x^3;$$

so daß unser Beispiel heißen würde

$$y' + \frac{y}{x(1-x)} = x^3.$$

Die allgemeine Lösung unseres Beispiels war

$$f(x,y) = e^{\int^x P(\xi_1)\,d\xi_1} \cdot y - \int_{x_0}^{x} Q(\xi)\, e^{\int^{\xi} P(\xi_1)\,d\xi_1} \cdot d\xi = \text{Const},$$

so daß wir zunächst folgendes Integral auszuführen haben:

$$\int P \cdot dx = \int \frac{dx}{x(1-x)}$$

oder nach erfolgter Partialbruchzerlegung

$$\int P \cdot dx = \int dx \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right]$$

$$= \log x - \log(x-1) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Der integrierende Faktor war

$$\mu = e^{\int^x g(\xi)\cdot d\xi},$$

also ist

$$\mu = e^{\log \frac{x}{x-1}} = \frac{x}{x-1}$$

Unsere Gleichung lautet nach Multiplikation mit dem integrierenden Faktor μ

$$\frac{x}{x-1}\cdot y' - \frac{y}{(x-1)^2} = \frac{x^4}{x-1}$$

die Lösung dieser Gleichung ist:

$$\frac{xy}{x-1} = \int \frac{x^4}{x-1}\, dx + C$$

$$= \int\left(\frac{x^4-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)dx + C$$

$$= \int\left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)\cdot dx + C$$

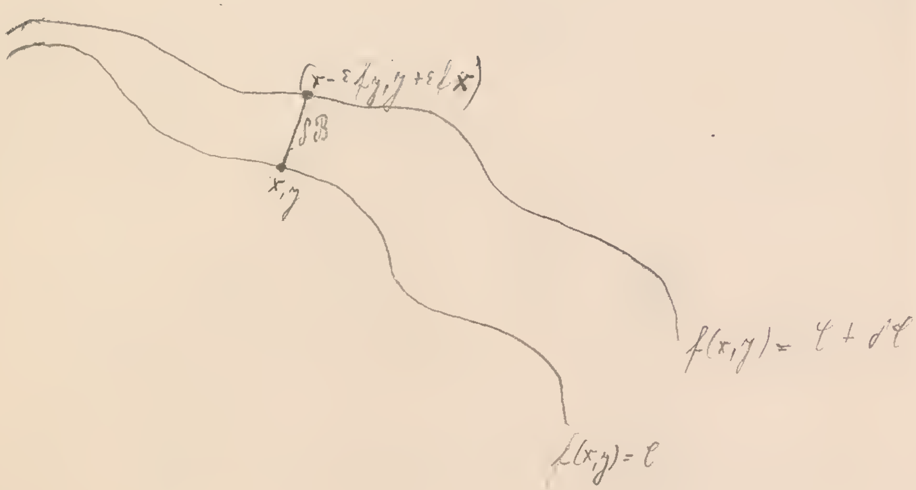
oder

$$\underline{\frac{xy}{x-1} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \log(x-1) + C.}$$

Wir haben uns hier klargemacht, wie man rein analytisch den Multiplikator einführt

hat. (cf. Leonhardi Euleri institutionum calculi integralis libr. IV. Petersb. 1768-1770).

Geometrisch gedeutet wurde der Multiplikator von Sophus Lie. (cfr. Lie, Gesellsch. d. Wissensch. zu Christiania 1874.) Lie ging bei seinen Untersuchungen folgendermaßen vor:
Wir zeichnen uns zwei benachbarte Integralkurven des Systems $f(x,y) = C$, die zwischen sich einen Kanal einschließen



Dieser Kanal hat natürlich an verschiedenen Stellen eine verschiedene Breite und es soll sich zunächst für uns darum handeln, festzustellen,

~~W~~ Wenn die relative Breite des Kanals beim Fortschreiten längs der Integralkurven sich ändert.

Die Breite des Kanals bezeichnet man mit δB, da die zweite Integralkurve sich von der ersten nur um eine ganz geringe Änderung der Konstanten unterscheidet, bezeichnen wir ferner sie mit

$$f(x,y) = C + \delta C.$$

Auf der Integralkurve $f(x,y) = C$ wählen wir nunmehr einen Punkt (x,y) und schreiten von ihm aus senkrecht zu der Kurve ein ein kleines Inkrement $(\delta x, \delta y)$ zu der anderen Integralkurven $f(x,y) = C + \delta C$ fort. Das Inkrement $(\delta x, \delta y)$ steht auf der Tangente der Kurven $f(xy)$, dx, dy, senkrecht, es ist also $\frac{dx}{dy} = -\frac{\delta y}{\delta x}$. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = 0$$

folgt, wenn wir die Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

einführen,

$$dx : dy = -f_y : f_x \quad \text{oder} \quad \delta x : \delta y = f_x : f_y,$$

also, wenn wir den Proportionalitätsfaktor ε ein-

suchen

$$\delta x = \varepsilon \cdot f_x \qquad \delta y = \varepsilon f_y .$$

Ich kann also dem Punkt auf der Kurve $f(x,y) = C + \delta C$, zu dem ich gelangt bin, die Koordinaten $(x + \varepsilon \cdot f_x,\ y + \varepsilon f_y)$ zuordnen.

Aus der Gleichung

$$f(x + \varepsilon f_x, y + \varepsilon f_y) = C + \delta C$$

findet man unter Fortlassen von Gliedern höherer Ordnung bei Entwicklung nach dem Taylorschen Satze

$$\varepsilon (f_x^2 + f_y^2) = \delta C$$

oder

$$\varepsilon = \frac{\delta C}{f_x^2 + f_y^2}$$

Die Breite des Kanals δB bestimmt sich aus der Formel

$$\delta B^2 = (x + \varepsilon f_x - x)^2 + (y + \varepsilon f_y - y)^2$$

oder

$$\delta B = \varepsilon \cdot \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

oder wenn ich für ε einsetze

$$\delta B = \frac{\delta C}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}.$$

Punkten der beiden

Da sich beim Betrachten von unendlich nahen Integralkurven, die sich ~~sämtlich~~ um δC unterscheiden, das δC heraushebt, können wir folgenden Satz aufstellen:

Die Breite unseres Kanals ist umgekehrt proportional zu $\sqrt{f_x^2+f_y^2}$.

Wenn nun die linke Seite einer gegebenen Differentialgleichung

$$M\cdot dx + N\cdot dy = 0$$

ein exaktes Differential ist, dann kann ich unmittelbar f_x durch M, f_y durch N ersetzen und ich finde:

δB ist umgekehrt proportional zu $\sqrt{M^2+N^2}$.

Wir können also den Satz aufstellen:

Ist die linke Seite der Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

ein exaktes Differential, dann wissen wir auch, wie die Breite unseres Kanals sich ändert beim Entlangschreiten längs der Kurven, nämlich umgekehrt proportional zu $\sqrt{M^2+N^2}$

Ist die linke Seite der Gleichung

$$M dx + N \cdot dy = 0$$

kein exaktes Differential, so kann ich dieses Differential exakt machen durch Multiplikation mit dem Multiplikator μ. Ich habe dann einzusetzen für f_x den Wert $\mu \cdot M$ und für f_y den Wert $\mu \cdot N$. So finde ich: die Breite des Kanals δB ist proportional zu $\frac{1}{\mu \cdot \sqrt{M^2+N^2}}$ oder μ ist proportional zu $\frac{1}{\delta B \cdot \sqrt{M^2+N^2}}$.

Der Multiplikator μ ist also eine solche Funktion von x und y, daß er sich beim Entlangschreiten längs der Integralkurven proportional zu $\frac{1}{\delta B \cdot \sqrt{M^2+N^2}}$ ändert.

Er hängt daher ab, einerseits von den Koeffizienten M und N der Differentialgleichung, andererseits von der relativen Breite des Kanals.

Giebt uns jemand die relative Breite des Kanals, so haben wir den Multiplikator μ.

Auch umgekehrt können wir sagen:
Einen Multiplikator finden, heißt irgend ein Urteil gewinnen über die Breite des Kanals.

Da nun μ natürlich mir durch eine partielle Differentialgleichung in x und y

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+M\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x}=0$$

definiert ist, so giebt es die verschiedensten Multiplikatoren und wir wählen uns davon zwei aus, etwa μ_1 und μ_2.

Da nun μ_1 und μ_2 längs der Integralkurven denselben Größen proportional sind, nämlich $\overline{\partial B\cdot\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$, so muß ihr Quotient konstant sein, also

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=K.$$

Das liefert ~~Nun stellen wir~~ das folgende Theorem ~~auf~~:

„Kennt man für die partielle Differentialgleichung des Multiplikators 2 wesentlich verschiedene Lösungen μ_1 und μ_2, so ist

man in der Gleichung $\frac{\mu_1}{\mu_2} = K$ die Gleichung der Integralkurven und braucht also zur Integration gar keine Quadratur."

~~Lehrsatz.~~ Ein analytischer Beweis soll folgen:

Da μ_1 und μ_2 beide die partielle Differentialgleichung des Multiplikators erfüllen sollen, so habe ich die beiden Gleichungen

$$\mu_1 \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - N \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0$$

und

$$\mu_2 \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + M \cdot \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - N \frac{\partial \mu_2}{\partial x} = 0$$

Ich multipliziere die erste Gleichung mit μ_2, die zweite mit μ_1 und subtrahiere, und erhalte

$$M \left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y}\right) - N\left(\mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right) = 0.$$

~~Wenn nun~~ Für $\frac{\mu_1}{\mu_2} = K$ ~~eine Lösung unserer Gleichung sein soll, so muß~~ gilt aber offenbar identisch

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}{\partial y} \cdot dy = 0$$

~~ferner~~

Wenn ich die Differentiation an dieser letzten Gleichung ausführe, so ist

$$\frac{\left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \mu_1 \cdot \frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right)}{\mu_2^2} \cdot dx + \frac{\left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y}\right)}{\mu_2^2} \cdot dy = 0$$

oder

$$\left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right) \cdot dx + \left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y}\right) \cdot dy = 0.$$

Da sich aber nun

$$\left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right) : \left(\mu_2 \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y}\right) = M : N.$$

verhält, so kann ich die Faktoren der letzten Gleichung durch M bezw. N ersetzen, da sich der Proportionalitätsfaktor heraushebt.

Die Lösung
$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = K$$
befriedigt also unsere Differentialgleichung
$$M\,dx + N \cdot dy = 0.$$

Wenn wir entlang der Kurven $\frac{\mu_1}{\mu_2} = K$

hinschreiten, ist die Differentialgleichung

$$M \cdot dx + N \cdot dy = 0$$

befriedigt, also schreiten wir längs einer Integralkurve dieser Gleichung fort, w. z. b. w.

—#—

Wie diese geometrische Deutung des Multiplikators praktisch verwendbar ist, soll an einem Beispiele klargelegt werden.

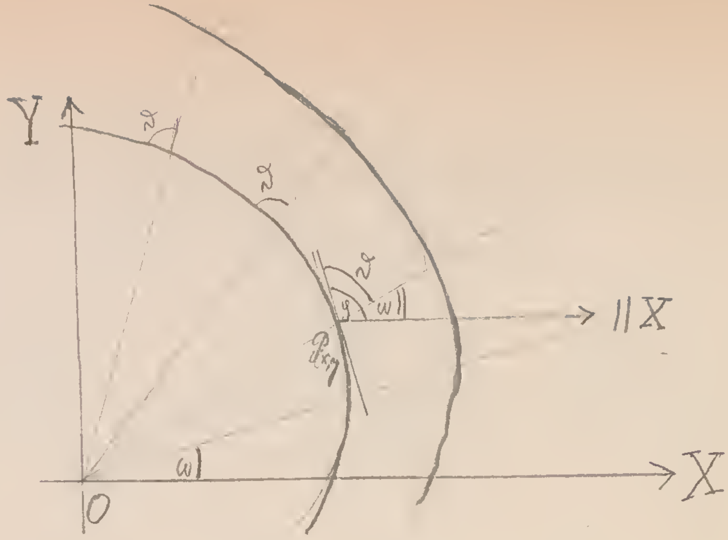
Beispiel:

Durch den Anfangspunkt O eines gegebenen (X Y) Systems sind eine Reihe von geraden Linien gezogen. Bei Einführung von Polarkoordinaten (r, ω) haben wir

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad tg\,\omega = \frac{y}{x}.$$

Unsere Aufgabe soll nun sein, das „Problem der Trajektorien" zu lösen, d. h. die Gleichung derjenigen Kurven zu integrieren, die jede Gerade unseres Systems unter demselben Winkel ϑ schneiden.

Nehmen wir uns eine solche Trajektorien=



Kurven gezeichnet denken, und eine Kurvenscha=
ren und in irgend einem Punkte $P(x,y)$ die Tan=
gente, die mit der X Achse den Winkel φ
einschließt, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx},$$

und andrerseits ist aber

$$\varphi = \vartheta + \omega,$$

also ist

$$\operatorname{tg}(\vartheta + \omega) = \frac{dy}{dx}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\vartheta \cdot \operatorname{tg}\omega} = \frac{dy}{dx}$$

Nehme ich hier für $\operatorname{tg}\omega$ den oben gefundenen Wert ein, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot tg\,\vartheta + y}{x - y \cdot tg\,\vartheta}$$

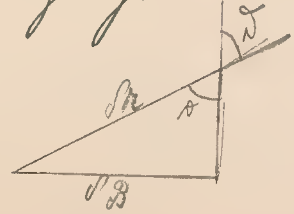
oder die Differentialgleichung der Kurven lautet

$$(x \cdot tg\,\vartheta + y)\,dx - (x - y \cdot tg\,\vartheta)\,dy = 0.$$

Da die linke Seite ein [illegible] Differential darstellt, so müssen wir zunächst einen integrierenden Multiplikator verschaffen.

Ich untersuche zu dem Zwecke die relative Breite eines von zwei benachbarten Integralkurven gebildeten Kanals.

Die Breite in orthogonaler Richtung bezeichne ich weiter mit δB, die Breite in Richtung des Radiusvektors mit δr. Es wird so ein rechtwinkliges Dreieck gebildet, das ich noch einmal heraus zeichne.

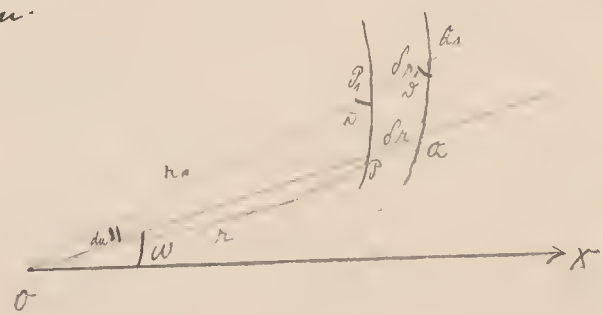


Aus diesem unendlich kleinen Dreieck findet man

$$\delta B = \delta r \cdot \sin d$$

Da d konstant ist, so ist δB längs der Integralkurve proportional zu δr.

Zur Weiterführung unserer Betrachtung ziehen wir uns nun ein von 2 benachbarten Radienvektoren r und r_1, die den Winkel $d\omega$ einschließen, gebildetes Dreieck heraus, indem wir gleichzeitig 2 benachbarte Integralkurven einzeichnen.



Die Dreiecke OPP_1 und OQQ_1 sind einander ähnlich, woraus folgt

$$r : r_1 = \delta r : \delta r_1$$

Also haben wir den Satz gewonnen:
Beim Entlangschreiten längs der Integralkurven ändern sich die Stückchen δr und

damit die Breite dB proportional zu dem Radiusvektor selbst.

Der Multiplikator μ ist ja nun bekanntlich proportional zu $\frac{1}{dB\cdot\sqrt{M^2+N^2}}$ und damit auch zu $\frac{1}{dr\sqrt{M^2+N^2}}$ und also auch zu

$$\frac{1}{r\cdot\sqrt{M^2+N^2}}$$

Da es ja nun beliebig viele Multiplikatoren gibt, so können wir auch den Proportionalitätsfaktor beliebig wählen. Wir setzen ihn gleich

$$\varrho = \sqrt{1+tg^2\vartheta}$$

und haben so

$$\mu = \frac{\sqrt{1+tg^2\vartheta}}{r\cdot\sqrt{M^2+N^2}}.$$

Nun ist

$$M^2 = x^2\,tg^2\vartheta + y^2 + 2xy\cdot tg\,\vartheta$$
$$N^2 = x^2 + y^2\cdot tg^2\vartheta - 2xy\cdot tg\,\vartheta$$

Also ist

$$M^2+N^2 = (x^2+y^2)(1+tg^2\vartheta)$$

Setze ich diesen Wert in die Gleichung

Für r ein, so ist

$$\mu = \frac{1}{r\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Nun ist ja aber gewählt worden auch

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$

also wird

$$\mu = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ muß ein Multiplikator unserer Differentialgleichung sein.

Wenn ich die gegebene Differentialgleichung mit diesem Multiplikator multipliziere, so wird sie gleich

$$tg\,\vartheta\cdot\frac{x\cdot dx + y\cdot dy}{x^2+y^2} - \frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{x^2+y^2} = 0,$$

eine Form, die nun nach den Regeln integriert werden könnte.

Da man jedoch sofort sieht, daß die linke Seite gleich folgendem Differential wird

$$d\left[tg\,\vartheta\cdot\frac{\log(x^2+y^2)}{2} - arc\,tg\,\frac{y}{x}\right] = 0,$$

so wird letzteres kaum nötig sein.

Wir erhalten als Lösung der Differentialgleichung

$$\operatorname{tg}\vartheta \cdot \log\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C$$

Wenn ich die Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

wieder einführe, so nimmt unser Resultat die Gestalt an

$$\log r = \frac{\omega + C}{\operatorname{tg}\vartheta}$$

oder

$$r = e^{\frac{\omega + C}{\operatorname{tg}\vartheta}}$$

Dies ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale und wir finden damit als Lösung unseres Problems folgendes: „Die Trajektorien unseres Systems von Geraden durch den Anfangspunkt sind logarithmische Spiralen."

Dies Resultat hätte bei Einführung von Polarkoordinaten ohne weiteres gewonnen werden können, weil sich in diesem Falle die Variabeln der Gleichung sofort separiert hätten.

Schließlich ist noch die Frage offen, warum wir einen solchen Streifen zwischen 2 Integralkurven einen Kanal genannt haben.

Diese Frage ist dahin zu beantworten, daß wir unsere theoretischen Betrachtungen durch hydrodynamische Vorgänge realisieren können.

Ist

$$M \cdot dx + N \cdot dy = 0$$

die Gleichung einer idealen Flüssigkeit, welche in einem von zwei Integralkurven gebildeten Kanale strömt, so erfüllen die Geschwindigkeitskomponenten u, v dieser Flüssigkeit die Gleichung

$$u : v = dx : dy,$$

also ist

$$u : v = N : (-M)$$

Ferner ist aber die Geschwindigkeit der Strömung $\sqrt{u^2+v^2}$ beim Entlanggehen längs der Kurven umgekehrt proportional der Breite δB, also direkt proportional der Größe $\mu \cdot \sqrt{M^2+N^2}$, und im

besonderem kann ich direkt setzen

$$\sqrt{u^2+v^2} = \mu\cdot\sqrt{M^2+N^2}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen bestimmt sich ~~u~~

$$u = \mu\cdot M \qquad v = -\mu\cdot N$$

Der Multiplikator μ hat die Eigenschaft, dass $\mu\cdot M$ und $-\mu\cdot N$ direkt die Komponenten einer Flüssigkeitsbewegung sind, bei der die einzelnen Flüssigkeitsteilchen sich im Sinne der Gleichung bewegen.

Die Differentialgleichung gibt uns ein Richtungsfeld, wenn wir aber μ richtig wählen, so liefern uns die ~~Komponenten~~ Ausdrücke $u = \mu\cdot M$, $v = -\mu\cdot N$ die Größen der ~~einzelnen Richtungen~~ Komponenten der Geschwindigkeit. Wir haben also dann ein Vektorfeld, welches die Strömung der gegebenen inkompressiblen Flüssigkeit darzustellen vermag.

Wir wollen zu dieser Theorie noch ein weiteres Beispiel durchrechnen, das sich nicht ungern anschliesst an ein bereits früher von uns behandeltes Problem, wir wollen untersuchen

Die geodätischen Linien auf Rotationsflächen.

(cfr pg. 66 – 68.)

Wir uns eine Rotationsfläche gegeben $z = \chi(\rho)$ und wir führen in der (XY) Ebene als Polarkoordinaten ρ und ω ein und sehen einerseits ω, andererseits z als Funktion von ρ an und verlangen, dass wir uns auf einer geodätischen Linie bewegen, dann war ω mit der unabhängigen Variabeln ρ durch folgende Differentialgleichung verbunden

$$\rho(1+\chi'^2)\cdot\omega'' + \left[2(1+\chi'^2) - \rho\cdot\chi'\cdot\chi''\right]\cdot\omega' + \rho^2\cdot\omega'^3 = 0.$$

Es soll nun diese Aufgabe sein, diese Differentialgleichung zu integrieren.

Da ω selbst in der Gleichung nicht vorkommt, so lässt sich unsere Differentialgleichung integrieren ~~als~~ durch Aufeinanderfolgen von zwei-

reduziren von Differentialgleichungen erster Ordnung, indem wir ein-fach als neue Unbekannte einführen

$$\Omega = \omega'.$$

Dann ist

$$\omega'' = \frac{d\Omega}{d\rho}$$

und unsere Differentialgleichung lautet nun

$$\rho\,(1+\chi'^2)\cdot\frac{d\Omega}{d\rho} + \left[2(1+\chi'^2)-\rho\cdot\chi'\cdot\chi''\right]\cdot\Omega+\rho^2\cdot\Omega^3 = 0,$$

ist also eine Differentialgleichung erster Ordnung, die wir schreiben können

$$\underbrace{\rho\,(1+\chi'^2)}_{M}\cdot d\Omega + \underbrace{\left[\left(2(1+\chi'^2)-\rho\chi'\cdot\chi''\right)\cdot\Omega+\rho^2\cdot\Omega^3\right]}_{N} d\rho = 0$$

Die linke Seite stellt ein ungenaues Differential dar, wir müssen also, bevor wir integriren können, einen Multiplikator bestimmen.

Die allgemeine partielle Differentialgleichung des Multiplikators ist ja

$$\mu\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial\rho}-\frac{\partial N}{\partial\Omega}\right)+M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\rho}-N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\Omega}=0,$$

wenn ich für M und N die Werte eingesetzt habe.

So finden wir

$$\mu\left[-(1+\chi'^2)+3\rho\cdot\chi'\cdot\chi''-3\rho^2\Omega^2\right]+\rho\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\rho}(1+\chi'^2)$$

$$+\Omega\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\Omega}\left(-2(1+\chi'^2)+\rho\cdot\chi'\cdot\chi''-\rho^2\Omega^2\right)=0.$$

Eine Lösung d. einer solchen homogenen Differentialgleichung kann man sich zu verschaffen versuchen, indem man für μ folgenden Wert einzusetzen versucht

$$\mu=\rho^{\alpha}\cdot\Omega^{\beta}.$$

Es wäre dann, da

$$\rho\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\rho}=\alpha\cdot\mu$$

und

$$\Omega\,\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\beta\cdot\mu \qquad \text{sind,}$$

$$0=\mu\left[-(1+\chi'^2)+3\rho\cdot\chi'\cdot\chi''-3\rho^2\cdot\Omega^2\right]+\alpha\mu(1+\chi'^2)$$

$$+\beta\cdot\underline{\mu}\left[-2(1+\chi'^2)+\rho\chi'\cdot\chi''-\rho^2\Omega^2\right)$$

Wenn also

$$\mu=\rho^{\alpha}\cdot\Omega^{\beta}$$

eine Lösung unserer Differentialgleichung

sein soll, so muss folgende Gleichung befriedigt werden

$$(1+\chi'^2)(-1+\alpha-2\beta)+(\rho\cdot\chi'\cdot\chi''-\rho^2\cdot\Omega^2)(3+\beta)=0.$$

Da ich nun nur irgend eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung suche, so kann ich folgendermaßen schliessen:
Die vorgegebene charakteristische Gleichung ist sicher befriedigt, wenn jede der beiden Klammern

$$(-1+\alpha-2\beta) \text{ und } (3+\beta)$$

für sich gleich Null ist.
So gewinne ich zur Bestimmung von α und β folgende beiden Gleichungen

$$\alpha-2\beta-1=0$$
$$\beta+3=0,$$

aus denen sich ergibt

$$\alpha=-5$$
$$\underline{\beta=-3}.$$

Es ist also

$$\mu = \rho^{-5} \cdot \Omega^{-3} = \frac{1}{\rho^5 \cdot \Omega^3}$$

ein Multiplikator unserer gegebenen Differentialgleichung.

Wenn ich mit diesem Multiplikator die gegebene Differentialgleichung

$$\rho \cdot (1+\chi'^2) \cdot d\Omega + \left[\left(2(1+\chi'^2) - \rho\chi'\chi''\right)\Omega - \rho^2\Omega^3\right] d\rho = 0$$

multiplizire, heißt die linke Seite der Gleichung

$$\frac{1+\chi'^2}{\rho^4 \cdot \Omega^3} \cdot d\Omega + \frac{2(1+\chi'^2) - \rho \cdot \chi' \cdot \chi''}{\rho^5 \cdot \Omega^3} \cdot d\rho + \frac{1}{\rho^3} \cdot d\rho = 0$$

ein exaktes Differential.

Um die Rechnung bequemer zu gestalten, multiplizire ich die Gleichung mit (-2)

$$-2\left(\frac{1+\chi'^2}{\rho^4 \cdot \Omega^3}\right) \cdot d\Omega - \frac{4(1+\chi'^2) - 2\rho \cdot \chi' \cdot \chi''}{\rho^5 \cdot \Omega^3} \cdot d\rho - \frac{2}{\rho^3} \cdot d\rho = 0$$

und sehe nun sofort, daß die linke Seite gleich folgendem Differential ist

$$d\left(\frac{1+\chi'^2}{\rho^4 \Omega^2}\right) + d\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0$$

oder

$$\frac{1+\chi'^2+\rho^2\cdot\Omega^2}{\rho^4\cdot\Omega^2} = \underline{\text{Const.}}$$

Es ist uns also in der Tat gelungen durch einen Multiplikatorenmethode die Integration zu vollziehen.

Wir haben nun um das gesuchte ω zu finden für Ω nur wieder ω' einzusetzen, wodurch wir, wenn ~~ich~~ wir die Konstante gleich $\frac{1}{K^2}$ setzen folgende Differentialgleichung erster Ordnung erhalten

$$\frac{\rho^4\cdot\omega'^2}{1+\chi'^2+\rho^2\cdot\omega'^2} = K^2$$

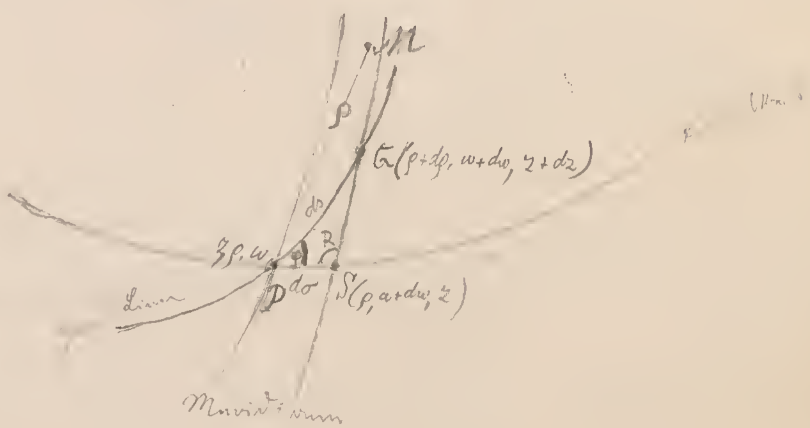
Durch unsere nochmalige Integration haben wir aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Differentialgleichung erster Ordnung erhalten, in der eine willkürliche Konstante K^2 auftritt, und die selbst nun weiter zu behandeln ist.

Ehe wir aber zu der weiteren Diskussion dieser Gleichung übergehen, wollen wir noch eine interessante geometrische Bedeutung dieser Gleichung

$$\frac{\rho^4 \cdot \omega'^2}{1+\chi'^2+\rho^2 \cdot \omega'^2} = K^2$$

kennen lernen.

Auf einer Rotationsfläche $z = \chi(\rho)$ sei irgend ein Parallelkreis gezeichnet mit dem Mittelpunkte M. Im Punkte P mit den Koordi-



naten (z, ρ, ω) trifft diesen Parallelkreis eine geodätische Linie unter dem Winkel φ. Ein Meridian schneidet den Parallelkreis im Punkte S

mit den Coordinaten $(\rho, \omega + d\omega, z)$, und die geodätischen Linie im Punkte Q mit den Coordinaten $(\rho + d\rho, \omega + d\omega, z + dz)$.
So erhalte ich ein rechtwinkliges Dreieck PQS, das ich in der Grenze als eben ansehen kann.
Ich nenne die Seiten

$$PQ = ds\,, \quad PS = d\sigma,$$

dann ist

$$\cos\varphi = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Nun ist aber

$$d\sigma = \rho \cdot d\omega$$

die Seite SQ ist gleich

$$SQ = \sqrt{d\rho^2 + dz^2}$$

und also ist

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + dz^2}$$

oder

$$ds = d\rho\sqrt{1 + \rho^2 \cdot \omega'^2 + \chi'^2}.$$

Der Cosinus des Winkels, der zwischen der geodätischen Linie und dem Parallelkreis eingeschlossen ist, hat folgenden Wert:

$$\cos\varphi = \frac{\rho\cdot\omega'}{\sqrt{1+\rho^2\cdot\omega'^2+\chi'^2}}$$

Also ist

$$\rho^2\cdot\cos^2\varphi = \frac{\rho^4\cdot\omega'^2}{1+\rho^2\cdot\omega'^2+\chi'^2} = K^2$$

oder

$$\rho\cdot\cos\varphi = K$$

Also gilt folgender Satz:
„Wenn wir an einer einzelnen bestimmten geodätischen Linie auf einer Rotationsfläche entlang gehen, dann ist $\rho\cdot\cos\varphi = K$, so dass das $\cos\varphi$ in demselben Maße wächst, als das ρ kleiner wird und umgekehrt."

Dieser Satz heisst seinem Entdecker zu Ehren der „Liouvillesche Satz." Er wurde von dem französischen Mathematiker Liouville im Jahre 1840 veröffentlicht.

Gehen wir nach diesem Exkurs zurück zur Diskussion unserer Differentialgleichung:

$$\frac{\rho^4 \cdot \omega'^2}{1+\rho^2 \cdot \omega'^2 + \chi'^2} = \mathcal{K}^2$$

durch einfache Umformung ergiebt sich

$$\rho^4 \cdot \omega'^2 = \mathcal{K}^2(1+\chi'^2) + \mathcal{K}^2 \cdot \rho^2 \cdot \omega'^2$$

oder

$$\rho^2 \omega'^2(\rho^2 - \mathcal{K}^2) = \mathcal{K}^2(1+\chi'^2)$$

also

$$\omega' = \sqrt{\frac{\mathcal{K}^2(1+\chi'^2)}{\rho^2 \cdot (\rho^2 - \mathcal{K}^2)}} .$$

daraus folgt

$$d\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{K}^2(1+\chi'^2)}{\rho^2(\rho^2-\mathcal{K}^2)}} \cdot d\rho$$

oder

$$\omega = \int \frac{\mathcal{K}}{\rho} \sqrt{\frac{1+\chi'^2}{\rho^2-\mathcal{K}^2}} \cdot d\rho + \text{Const.}$$

Nachdem nun die erste Integration durch die Einführung des Multiplikators gelungen ist und zum Liouvilleschen Satz geführt hat, erledigt sich die zweite Inte=

gration ohne weiteres durch Quadratur, wobei als neue Integrationskonstante eine additive Konstante auftritt.

Daß hier eine additive Konstante auftritt, entspricht der geometrisch evidenten Tatsache, daß eine geodätische Linie auf der Rotationsfläche geodätische Linie bleibt, wenn man sie durch irgend einen Winkel um die Rotationsachse dreht.

Diese allgemeinen Ausführungen wollen wir auf einige spezielle Rotationskörper anwenden, nämlich 1.) auf das Rotationsellipsoid, 2.) auf das Rotationshyperboloid und schließlich 3.) auf den einfachsten Rotationskörper, die Kugel.

1.) Das Rotationsellipsoid

Die Gleichung des dreiachsigen Ellipsoids lautet ja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Wenn wir nun für unser Rotationsellipsoid die z Achse als Rotationsachse auffassen, so wird

$$a = b\,, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2;$$

und mithin lautet die Gleichung

$$\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder

$$z = \chi(\rho) = \frac{c}{a}\cdot\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

Also ist

$$\chi'(\rho) = \frac{c\cdot\rho}{a\cdot\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

Diesen Werth haben wir einzutragen in die Gleichung

$$\omega = \int \frac{\mathcal{K}}{\rho}\cdot\sqrt{\frac{1+\chi'^2}{\rho^2-\mathcal{K}^2}}\cdot d\rho + \mathcal{C},$$

wodurch wir als Gleichung der geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoide erhalten

$$\omega = \int \frac{\mathcal{K}}{a\cdot\rho}\cdot\sqrt{\frac{a^4+\rho^2(c^2-a^2)}{(\rho^2-\mathcal{K}^2)(a^2-\rho^2)}}\,d\rho + \mathcal{C}.$$

Durch die einfache Substitution $\rho^2 = \sigma$ sieht man, dass dies Integral ein elliptisches Integral wird. Denn es lautet dann

$$\omega = \int \frac{\mathcal{K}}{2a\sigma}\cdot\sqrt{\frac{a^4+(c^2-a^2)\cdot\sigma}{(\sigma-\mathcal{K}^2)(a^2-\sigma)}}\cdot d\sigma.$$

Bevor wir jedoch dieses Integral weiter diskutieren, wollen wir zunächst die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Rotationshyperboloide aufstellen.

2.) Das Rotationshyperboloid.

Die Gleichung des einschaligen Rotationshyperboloids lautet

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

oder

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Wenn ich hier nun genau dieselben Rechnungen durchführe, wie beim Ellipsoide, so ist

$$z = \chi(\rho) = \frac{c}{a}\cdot\sqrt{\rho^2 - a^2}$$

$$z' = \chi' = \frac{c\cdot\rho}{a\sqrt{\rho^2-a^2}}.$$

Also ist

$$\omega = \int \frac{K}{a\cdot\rho}\sqrt{\frac{-a^4+\rho^2(c^2+a^2)}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-K^2)}}\cdot d\rho + C.$$

Wenn ich wieder

$$\rho^2 = \sigma$$

setze, so findet man wieder, daß unser

Integral

$$w = \int \frac{K}{2a\sigma} \cdot \sqrt{\frac{-a^4 + \sigma(a^2+c^2)}{(\sigma - a^2)(\sigma - K^2)}} \cdot d\sigma + C.$$

ein elliptisches Integral ist.

3.) Die Kugel

Für die Gleichung der geodätischen Linien auf der Kugel gilt die Gleichung der g. Linien auf dem Ellipsoide, wenn ist

$$c^2 = a^2,$$

also ist

$$w = \int \frac{K}{2a\sigma} \cdot \sqrt{\frac{a^4}{(a^2-\sigma)(\sigma - K^2)}} \cdot d\sigma + C.$$

Für die Kugel verwandelt sich also das elliptische Integral in ein cyklometrisches Integral. Die Ausführung desselben würden sich die größten Kreise als geodätische Linien ergeben.

Alle diese Integrale enthalten die beiden willkürlichen Konstanten K und C. Wir haben also zweifach unendlich viele Integralkurven. Da eine Änderung des C unwesentlich ist, so wollen wir die geodätischen Linien, die sich nur durch eine Veränderung des C unterscheiden, als eine „Familie" bezeichnen. So zerfallen die zweifach unendlich vielen geodätischen Linien nach dem Werte des K^2 in eine einfach unendliche Schar von Familien. Die einzelnen Familien wollen wir nun im folgenden behandeln.

1/ Das Rotationsellipsoid.

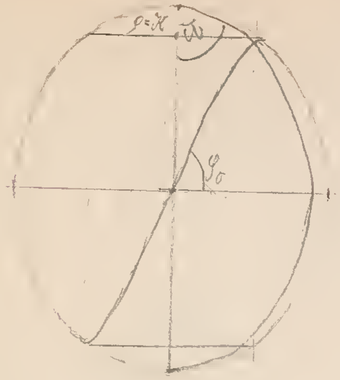
Im Anschluss an den Liouville'schen Satz

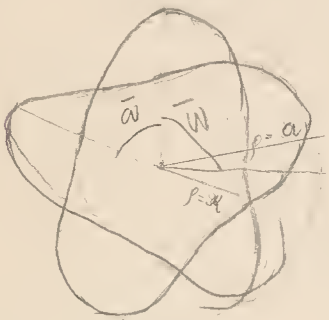
$$\rho \cdot \cos\varphi = K,$$

sieht man, dass

$$0 \leq K^2 \leq a^2$$

sein muss, da ρ höchstens gleich a, $\cos\varphi$ höchstens gleich 1 sein kann.





Ist nun

$$K^2 = 0,$$

so folgt nach dem Liouvilleschen Satze

$$\cos\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Diese so definierte geodätische Linie ist ein Meridian.

Ist weiter $K^2 = a^2$, so muß auch $\rho^2 = a^2$ sein und $\cos\varphi = 1$.

Es ist also $\varphi = 0$.

die geodätische Linie ist der Äquator.

Im allgemeinen Falle wird also

$$0 < K^2 < a^2$$

sein. Es wird dann auf der oberen und unteren Halbkugel einen Parallelkreis mit

Radius $\rho = K$ haben. Man sieht unschwer aus dem Liouville'schen Satze, dass die geodätischen Linien zwischen diesen beiden Parallelkreisen verlaufen müssen. Denn oberhalb oder unterhalb dieser Parallelkreise wäre $\rho < K$, mithin $\cos\varphi > 1$, φ also imaginär.

Da das φ sich stetig ändert, so wird die geodätische Linie in symmetrisch periodischer Weise zwischen den beiden Parallelkreisen auf- und absteigend hin und her verlaufen. Sie wird den Äquator unter dem Winkel φ_0 schneiden, der durch die Gleichung

$$\cos\varphi_0 = \frac{K}{a}$$

bestimmt ist.

In der Verticalprojection stellt sich die geodätische Linie als eine Art Rosette dar, welche alternierend den Kreis vom Radius a und den Kreis vom Radius K berührt.

Wir werden nun fragen, wie groß ist der Winkel, den die beiden Meridiane bilden, von denen der eine durch den Schnittpunkt der geodätischen Linie mit dem Äquator geht, der andere durch den Berührungspunkt, den dieselbe geodätische Linie mit dem einen der Kreise $\rho = K$ gemeinsam hat.

Dieser Winkel $\bar{\omega}$ ist gleich dem bestimmten Integral

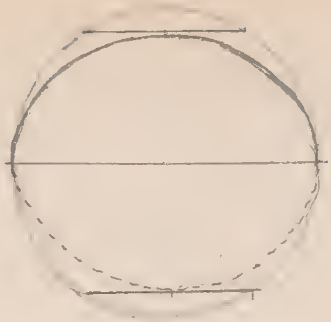
$$\bar{\omega} = \int_a^K \frac{K}{a \cdot \rho} \cdot \sqrt{\frac{a^4 + \rho^2(c^2 - a^2)}{(\rho^2 - K^2)(a^2 - \rho^2)}} \cdot d\rho.$$

Statt aber dieses komplizierte Integral auszurechnen, wollen wir uns den Wert von ω durch die Anschauung klar machen.

Auf der Kugel, dem speziellen Ellipsoide, für das $c = a$ ist, verwandelt sich unsere Rosette in eine Ellipse, welche dem Kreise $\rho = a$ einbeschrieben und dem Kreise $\rho = K$ umbeschrieben ist.

Der Winkel $\bar{\omega}$ ist also hier gleich

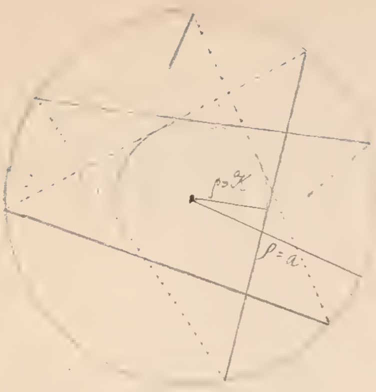
$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{2}$$



Da sich nun die Kugel als Übergangsfall des abgeplatteten Ellipsoides zum verlängerten Ellipsoide auffassen läßt, so schließt man aus dem Gefühl für Kontinuität, daß der Winkel ω auf dem einen der beiden erwähnten Ellipsoide größer als $\frac{\pi}{2}$, auf dem anderen kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein wird. Es fragt sich nur, auf welchem ω größer, auf welchem kleiner ist.

Um diese Frage zu entscheiden, untersuchen wir ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, und zwar in der Grenzlage der Scheibe.

Die geodätische Linie besteht jetzt aus geradlinigen Stücken, die den Kreis $\rho = K$ berühren und auf dem Kreise $\rho = a$ mit Knicken aneinanderstoßen.



Da der zu einer solchen geraden Linie gehörende Centriwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist

$$\bar{\omega} < \frac{\pi}{2}$$

Auf dem abgeplatteten Ellipsoid ist $\bar{\omega} < \frac{\pi}{2}$, auf dem verlängerten ist $\bar{\omega} > \frac{\pi}{2}$

Da man die Erde als ein abgeplattetes Ellipsoid auffasst, so bleibt von den geodätischen Linien, die sich auf der Erde durch den [illegible] ziehen lassen, nur der Meridian durch den Pol hindurch, während alle übrigen nur zu einer maximalen nördlichen und südlichen Breite reichen, dort umkehren und dann in der darauf folgenden Weise periodisch verlaufen.

2. Das Rotationshyperboloid.

Die Gleichungen lauten hier:

$$z = \chi(\rho) = \frac{c}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2}$$

und entsprechend

$$w = \int \frac{K}{a\cdot\rho}\sqrt{\frac{(c^2+a^2)\rho^2 - a^4}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - K^2)}}\cdot d\rho$$

Für ρ und K können in diesem Falle nur untere Grenzen angegeben werden, von denen aus sie ins Unendliche laufen.

Es ist

$$\rho^2 \geqq a^2$$

und

$$K^2 \geqq 0$$

Wir untersuchen nun zunächst die besonderen Fälle geodätischer Linien.

Ist $K = 0$, so folgt aus dem Liouville-schen Satz $\cos\varphi = 0$, mithin

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Es liegt der Fall des Meridians vor

Ist $K^2 = a^2$, so ~~muss~~ folgt, wenn ~~wir eine~~ auch
~~veränderliche im Punkte bewegen, auch~~ $\rho^2 = a^2$
~~sein, und folgt~~ ist, aus dem Liouvilleschen Satze

$$\cos\varphi = 1$$
$$\varphi = 0.$$

Es liegt also der Fall des Kehlkreises vor, der Kehlkreis ist eine geodätische Linie.

Im allgemeinen ist aber $\rho > a$; der Liouvillesche Satz lautet

$$\cos\varphi = \pm\frac{a}{\rho}.$$

Es sind also jedem Punkte auf einem Parallelkreise zwei Fortschreitungsrichtungen zugeordnet. Wir werden also 2 Familien geodätischer Linien bekommen, von denen jede eine das Hyperboloid vollständig überdeckt.

Die geodätischen Linien sind Schraubenlinien, und zwar die eine Familie rechtsgewundene Schraubenlinien, die andere Familie linksgewundene Schraubenlinien.

Wir werden sich aber diese Schraubenlinie-

zu erhalten, wenn sie an die Grenzlage des Kehlkreises herankommen?
Darüber soll uns Auskunft geben folgender

Satz:

Die besonderen geodätischen Linien, $K^2=a^2$, kommen mit fortgesetzt immer flacher verlaufenden Windungen dem Kehlkreise immer näher, ohne ihn jedoch je zu erreichen, sie verlaufen zum Kehlkreise asymptotisch.

Beweis:

Um das Zusammentreffen der geodätischen Linien mit dem Kehlkreise auszudrücken, haben wir das Integral für w von irgend einem Anfangswerte ρ_0 bis a laufen zu lassen, es ist also

$$w = \int_{\rho_0}^{a} \frac{K}{a\cdot\rho} \cdot \sqrt{\frac{(c^2+a^2)\cdot\rho^2 - a^4}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-K^2)}} \cdot d\rho$$

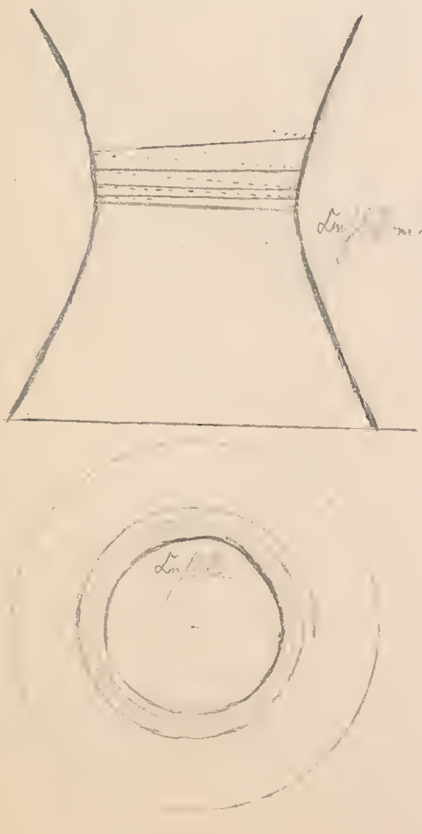
Dieses Integral wird zwar für $\rho = a$ unendlich gross, aber es ist ein erlaubtes Unendlich. Das Integral läuft auf einen festen Grenz-

wert hinaus. (cfr. Klein: Differential- u. Integral-rechnung II. pg. 191. u. 205.).

Ist aber $K^2 = a^2$, so erhalten wir für ω folgendes Integral:

$$\omega = \int_{\rho_0}^{a} \pm \frac{\sqrt{(c^2+a^2)\rho^2 - a^4}}{\rho\cdot(\rho^2-a^2)} \cdot d\rho = \infty$$

Hier haben wir es mit einem eigentlichen Unendlich zu thun, das Integral läuft nicht auf einen festen Grenzwert hinaus. Damit ist der Satz bewiesen. q.e.d.



Wir haben nun den allgemeinen Fall zu betrachten, daß

$$K \neq a^2$$

ist.

Bei der Untersuchung dieses Falles wollen wir zwei Unterfälle unterscheiden, nämlich

dass α.) $K^2 > a^2$ ~~sein~~ und β.) $K^2 < a^2$ sei. Liegt der Fall α.) vor, so wollen wir von geodätischen Linien erster Art sprechen, im Falle β.) von geodätischen Linien zweiter Art.

α. Geodätische Linien erster Art.

Da $K^2 > a^2$ sein soll, so werden wir sowohl oberhalb wie unterhalb des Kehlkreises einen Parallelkreis mit dem Radius $\rho = K$ haben.

Es ist nun sofort klar, dass innerhalb der von diesen beiden Parallelkreisen eingeschlossenen Zone geodätische Linien nicht verlaufen können. Da hier stets $\rho < K$ ist, und also nach dem Liouville-schen Satze

$$\cos\varphi = \frac{K}{\rho} > 1$$

wäre.

Wir stellen also über den Verlauf der geodätischen Linien sofort den folgenden Satz auf.

Satz:

Die geodätische Linie erster Art verläuft

den Horizontalkreis $\rho^2 = K^2$ und verläuft von dort allmählich immer steiler werdend ins Unendliche.

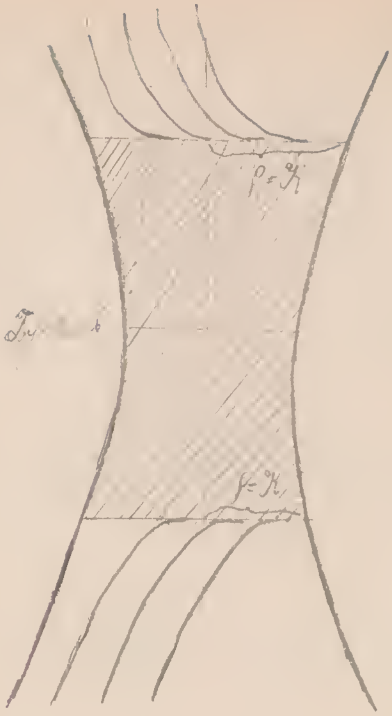
Beweis:

Daß der Kreis $\rho^2 = K^2$ an einer bestimmten Stelle von der einzelnen geodätischen Linie berührt wird ergiebt sich daraus, daß das Integral

$$\omega = \int_{\rho_0}^{K} \frac{K}{a\cdot\rho} \cdot \sqrt{\frac{(c^2+a^2)\rho^2 - a^4}{(\rho^2-a^2)(\rho^2-K^2)}} \cdot d\rho$$

bei $\rho = K$ zwar ~~un~~ unendlich wird, daß aber ein erlaubtes Unendlich vorliegt, ω selbst also endlich wird

Von dieser Berührungsstelle aus $+$ wird sich die geodätische Linie, da ρ immer mehr wächst, $\cos\varphi$ kleiner, φ selbst also größer wird, immer steiler ins Unendliche erheben, w. z. b. w.



B. Geodätische Linien zweiter Art.

Da $K^2 < a^2$ ist, so sieht man sofort aus dem Liouville-schen Satze folgendes:

Eine geodätische Linie zweiter Art schneidet alle ~~alle~~ Parallelkreise, auch den Kehlkreis, unter einem von Null verschiedenen Winkel, der zwar wächst, je mehr wir uns vom Kehlkreise entfernen; aber für den Kehlkreis selbst nur einen von Null verschiedenen Minimalwert erreicht.

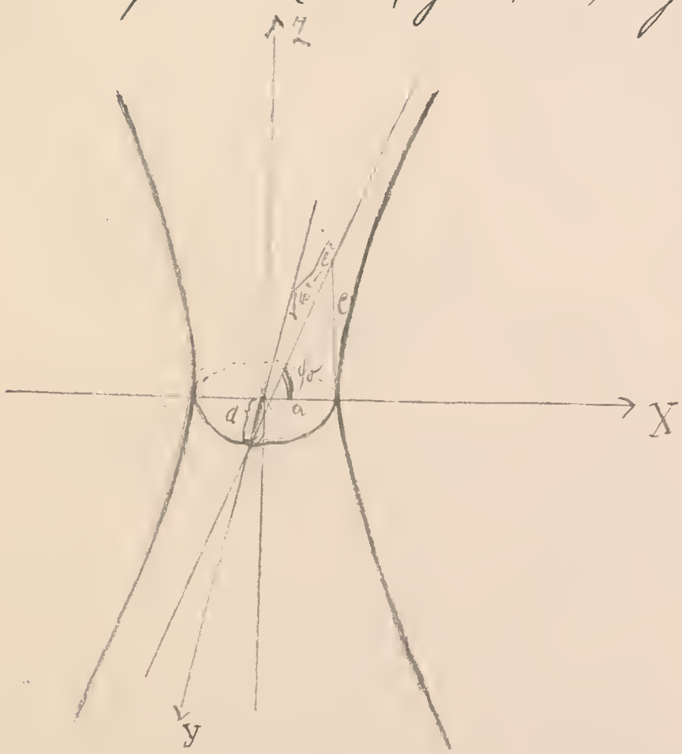
Von diesen geodätischen Linien zweiter Art wollen wir noch einen Spezialfall behandeln, nämlich den Fall der geradlinigen Erzeugenden des Hyperboloids.

Sooft auf einer Fläche eine gerade Linie verläuft, ist diese auch eine geodätische Linie der

Fläche und im besondern sind auch die auf dem Hyperboloid verlaufenden Geraden geodätische Linien, natürlich der zweiten Art.

Unsere erste Frage ist, für welchen Wert des K^2 werden die geodätischen Linien die Gestalt von geraden Linien annehmen.

Besonders einfach lässt sich K^2 bestimmen, wenn wir speziell die beiden Geraden wählen, die durch den Punkt $(x=0,\ y=a,\ z=0)$ hindurchlaufen



Die gesuchten Geraden liegen in der Tangentialebene $y = a$, wir erhalten also ihre Gleichung, wenn wir diesen Wert in die Gleichung des Hyperboloids einsetzen. Es ist dann

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

oder die Gleichungen der beiden Geraden lauten

$$1)\ \frac{x}{a} = +\frac{z}{c} \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{x}{a} = -\frac{z}{c}$$

Der Winkel φ_0 unter dem diese Geraden den Kehlkreis schneiden, lässt sich leicht berechnen, denn für $x = \pm a$, ist $z = c$.

Also ist

$$\cos\varphi_0 = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

da noch $\rho_0 = a$ ist so folgt aus dem Liouville-schen Satze

$$K = \underline{\rho_0 \cdot \cos\varphi_0} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Die geradlinigen Erzeugenden stellen sich also unter den übrigen geodätischen Linien

ein, wenn wir setzen

$$K = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Wir können noch weiter untersuchen, wie sich der Integralausdruck für ω in diesem besonderen Falle vereinfachen wird.
Wir werden haben

$$\omega = \int \frac{\pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot d\rho \cdot \sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{\rho^2 - \frac{a^4}{a^2+c^2}}}{a \cdot \rho \cdot \sqrt{(\rho^2-a^2)\left(\rho^2 - \frac{a^4}{a^2+c^2}\right)}}$$

oder

$$\omega = \int \pm \frac{a \cdot d\rho}{\rho \cdot \sqrt{\rho^2 - a^2}}$$

$$\omega = \pm \int \frac{\frac{a}{\rho^2}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}}} \cdot d\rho$$

oder

$$\omega = \mp \arc\sin\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

Das ist die Gleichung einer Geraden, die als Projektion
~~Da nun aber $y = \rho \cdot \sin\omega$ ist, so erhalten~~ der
geodätischen Linie auf die (r, φ)-Ebene darstellt.

~~wir also~~

~~$y = \pm a.$~~

~~Unsere Rechnung vereinfacht sich also so.~~

Einführung neuer Veränderlicher.

Unsere bisherigen Methoden zur Integration von Differentialgleichungen waren folgende. Es führten uns zur Lösung:

a. der direkte Versuch, die Gleichung mit einem uns passend erscheinenden Werte zu befriedigen, wie wir ~~ihn~~ es bei der linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vornahmen.

b. Die unmittelbare Integration durch Quadratur, wenn $M \cdot dx + N \cdot dy = 0$ ein exaktes Differential war. Ein Spezialfall war hier, wenn sich die Variabeln unmittelbar separierten, wie wir es bei der Gleichung der Kurven stärksten Falles auf dem Paraboloid fanden.

<u>c. Die Multiplikatormethode</u>, wenn die gegebenen Gleichung $Mdx + N.dy = 0$ kein exaktes Differential war. Diese Methode verwendeten wir zur Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebigen Koeffizienten; ebenfalls auch bei der Differentialgleichung der Kettenlinie und der der geodätischen Linien auf Rotationsflächen.

<u>d. Die Variation der Konstanten.</u>

Diese führte uns zur Lösung bei der lin. Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, ferner auch bei der linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebigen Koeffizienten.

Alle diese Methoden der Integration könnte man im Gegensatz zu der approximativen ~~Dch~~ numerischen Integration einer Differentialgleichung, die wir uns geometrisch durch Ersetzen der Integralkurve durch ein Polygon anschaulich machten, ~~kan~~ als die elementaren Me-

thoden zur analytischen Integration von Differen-
tialgleichungen beziehen.

Sollte nun eine gegebene Differentialgleichung mit einer dieser Methoden nicht lösbar sein, so kann man versuchen, sie durch Einführung neuer Veränderlicher auf eine solche Form zu bringen, die durch eine unserer Methoden gelöst werden kann. Mit diesem Gegenstande wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

Einfachste Fälle der Einführung neuer Veränderlicher haben wir im Verlaufe der Vorlesung bereits mehrfach behandelt, (so z. B. die Drehung der (X, Y) Ebene, Einführung von Polarkoordinaten etc.), wir wollen dem aber noch ein neues Beispiel anschliessen, die Integration einer Differentialgleichung, die die Gleichungen der Curven stärksten selbst und das Tangentenproblems als spezielle Fälle in sich enthält.

—

Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y + \beta x}{\gamma y + \delta x}.$$

Die Integration dieser Gleichung wird darauf hinauslaufen, daß wir anstatt des gegebenen, (wie wir annehmen wollen), rechtwinkligen Koordinatensystems ein geeignetes schiefwinkliges einführen.

Wir kommen zu der Annahme, daß es an dem gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem vielleicht eine Gerade $y = \lambda x$ geben möchte, die unserer Differentialgleichung als partikuläre Lösung befriedigt.

Wir versuchen daher mit dem Werte

$$y = \lambda x$$

unsere Differentialgleichung zu befriedigen, wodurch wir für λ die charakteristische Gleichung erhalten

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$$

oder

$$\gamma \cdot \lambda^2 + (\delta - \alpha) \cdot \lambda - \beta = 0,$$

woraus sich für λ die beiden Werte ergeben

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha - \delta) + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)}}{2\gamma}$$

und $$\lambda_2 = \frac{(\alpha - \delta) - \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)}}{2\gamma}$$

Die beiden Geraden

$$\xi = y - \lambda_2 x = 0$$

und $$\eta = y - \lambda_1 x = 0$$

führen wir als neue Koordinatenachsen ein. Wir haben also in unsere ursprüngliche Differentialgleichung einzusetzen:

$$x = \frac{\xi - \eta}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$y = \frac{\lambda_1 \xi - \lambda_2 \eta}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 \cdot d\xi - \lambda_2 \cdot d\eta}{d\xi - d\eta},$$

Unsere Differentialgleichung ~~die~~ nimmt daher die Gestalt an ~~an~~

$$\frac{\lambda_1 d\xi - \lambda_2 d\eta}{d\xi - d\eta} = \frac{\alpha(\lambda_1 \xi - \lambda_2 \eta) + \beta(\xi - \eta)}{\gamma(\lambda_1 \xi - \lambda_2 \eta) + \delta(\xi - \eta)},$$

oder wenn ich ausmultipliziere und in geeigneter Weise ausklammere

$$\xi \cdot d\xi \left[\gamma \cdot \lambda_1^2 + (\delta - \alpha) \cdot \lambda_1 - \beta\right] - \eta \cdot d\xi \left[\gamma \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \delta \cdot \lambda_1 - \alpha \cdot \lambda_2 - \beta\right]$$

$$= \xi \cdot d\eta \left[\gamma \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \delta \cdot \lambda_2 - \alpha \cdot \lambda_1 - \beta\right] - \eta \cdot d\eta \left[\gamma \cdot \lambda_2^2 + (\delta - \alpha) \cdot \lambda_2 - \beta\right].$$

Nun war aber die Gleichung

$$\gamma \cdot \lambda^2 + (\delta - \alpha) \cdot \lambda - \beta = 0.$$

diejenige Gleichung, die von λ_1 und λ_2 befriedigt wurde. Also fallen in unserer Differentialgleichung der erste Term links und der zweite Term rechts fort.

Ferner aber folgt aus der charakteristischen Gleichung für λ

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{\beta}{\gamma}$$

Nach Einführung dieser Vereinfachungen lautet nunmehr unsere Differentialgleichung

$$-(\delta\cdot a_1 - \alpha\cdot a_2 - 2\beta)\cdot\eta\cdot d\xi = (\delta\cdot a_2 - \alpha\cdot a_1 - 2\beta)\cdot\xi\cdot d\eta,$$

wenn die Koeffizienten zu berechnen sind. Es ergeben sich für diese die Werte:

$$\delta\cdot a_1 - \alpha\cdot a_2 - 2\beta = \frac{\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{\gamma}\cdot\left(\frac{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}\right)$$

und

$$\delta a_2 - \alpha\cdot a_1 - 2\beta = -\frac{\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{\gamma}\cdot\left(\frac{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}\right),$$

die in die Differentialgleichung eingesetzt werden, welche dadurch folgendes Aussehen gewinnt:

$$\xi\cdot d\eta\cdot\left(\frac{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\cdot\delta-\beta\gamma)}}{2}\right) = \eta\cdot d\xi\left(\frac{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}\right),$$

wo sich die Variabeln sofort separieren

$$\frac{d\eta}{\eta}\cdot\left(\frac{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}\right) = \frac{d\xi}{\xi}\cdot\left(\frac{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}\right),$$

so dass die Gleichung integrabel wird.

Führen wir die Abkürzungen

$$\rho_1 = \frac{\alpha+\delta+\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\cdot\gamma)}}{2}$$

und

$$\rho_2 = \frac{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\cdot\gamma)}}{2}$$

einführe, so erhalte ich durch Integration der Gleichung

$$\rho_1 \cdot \frac{d\eta}{\eta} = \rho_2 \cdot \frac{d\xi}{\xi}$$

folgendes Resultat

$$\rho_1 \cdot \log \eta = \rho_2 \cdot \log \xi + C$$

oder

$$\underbrace{\eta^{\rho_1} = K \cdot \xi^{\rho_2}}!$$

wenn ich $C = \log K$ setze.

Wir wollen an demselben Beispiel aber noch eine andere Methode der Einführung neuer unveränderlicher Formen kennen. Es ist ein allgemein in der Mathematik nützlicher Gedanke, Verhältnisse in Räumen von niederen Dimensionen dadurch mögliche=

versuche sich klarer zu machen, daß man sie auffaßt als Projektionen aus Räumen von höheren Dimensionen.

Wir führen eine neue Variable t so ein, daß sich y und x durch die Gleichungen

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y + \beta x$$

$$\frac{dx}{dt} = \gamma y + \delta x$$

als Funktionen von t bestimmen.

Wenn wir das hierdurch bestimmte räumliche Gebilde auf die (XY) Ebene projizieren, d.h. t eliminieren, so ergiebt sich wirklich unsere Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y + \beta x}{\gamma y + \delta x}.$$

Statt unserer gegebenen Differentialgleichung haben wir also jetzt ein System von 2 Differentialgleichungen, dessen allgemeine Lösung zu suchen ist.

Wir versuchen nun eine Lösung von der

Art zu finden, daß wir setzen

$$y = \mu \cdot e^{\rho \cdot t} \qquad x = \nu \cdot e^{\rho \cdot t}$$

oder wenn ich speziell

$$\frac{\mu}{\nu} = \lambda \quad \text{und} \quad \nu = 1$$

setze:

$$y = \lambda \cdot e^{\rho t}, \qquad x = e^{\rho t}.$$

Wenn ich diese Werte in das System einsetze so bekomme ich, indem sich $e^{\rho t}$ heraushebt, zur Bestimmung von ρ und λ die beiden Gleichungen

$$\lambda \cdot \rho = \alpha \cdot \lambda + \beta$$

$$\rho = \gamma \cdot \lambda + \delta$$

oder

$$(\alpha - \rho) \cdot \lambda + \beta = 0$$

$$\gamma \cdot \lambda + (\delta - \rho) = 0.$$

Also ist folgende Determinante gleich Null

$$\begin{vmatrix} \alpha - \rho & \beta \\ \gamma & \delta - \rho \end{vmatrix} = 0$$

oder wenn ich die auflöse

$$\rho^2 - (\alpha+\delta)\cdot\rho + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0,$$

wodurch sich bestimmt

$$\rho = \frac{\alpha+\delta \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}$$

oder

$$\rho_1 = \frac{\alpha+\delta + \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}$$

und

$$\rho_2 = \frac{\alpha+\delta - \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2}$$

Es bestimmt sich nun weiter

$$\lambda = \frac{\rho-\delta}{\gamma}$$

also $\lambda_1 = \frac{\rho_1-\delta}{\gamma}$ und $\lambda_2 = \frac{\rho_2-\delta}{\gamma}$.

oder

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-\delta + \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2\gamma}$$

und

$$\lambda_2 = \frac{\alpha-\delta - \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)}}{2\gamma}.$$

Diese Ausdrücke für ρ_1 und ρ_2 und die zugehörigen für λ_1 und λ_2 sind dieselben Werte, die wir bei der vorigen Auflösungsme-

Achsen mit ρ_1, ρ_2 bzw. λ_1 λ_2 bezeichnet hatten.

Wir haben jetzt also folgende beiden Partikularlösungen unserer Gleichung

I.
$$y_1 = \lambda_1 \cdot e^{\rho_1 t} \quad , \; x_1 = e^{\rho_1 t}$$

II.
$$y_2 = \lambda_2 \cdot e^{\rho_2 t} \qquad x_2 = e^{\rho_2 t},$$

woraus wir folgende allgemeine Lösung gewinnen

$$y = c_1 \cdot \lambda_1 \, e^{\rho_1 t} + c_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\rho_2 t}$$
$$x = c_1 \cdot e^{\rho_1 t} + c_2 \cdot e^{\rho_2 t}.$$

Diese Integralkurven des Raumes müssen nun noch auf die (XY) Ebene projiziert, d.h. t muß eliminiert werden.

Die Elimination gelingt am leichtesten, wenn ich wieder die früher gewählten Koordinatenachsen η und ξ einführe. Es ist

$$\eta = (y - \lambda_1 x) = c_2 (\lambda_2 - \lambda_2) \cdot e^{\rho_2 t}$$

und

$$\xi = y - \lambda_2 x = c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \, e^{\rho_1 t}.$$

Wenn ich jetzt die erste Gleichung zur $\rho_1$ten, die zweite zur $\rho_2$ten Potenz erheben und beide Gleichung durch einander dividieren, so fällt t heraus und ich erhalte

$$\frac{\eta^{\rho_1}}{\xi^{\rho_2}} = \frac{c_2^{\ \rho_1}(\lambda_2-\lambda_1)^{\rho_1}}{c_1^{\ \rho_2}(\lambda_1-\lambda_2)^{\rho_2}} = K.$$

Ich erhalte so die Gleichung der Integralkurven wieder in der früheren Form

$$\eta^{\rho_1} = K\cdot\xi^{\rho_2}$$

Die Hinzunahme der dritten Variabeln hat die Rechnung von besonderen Kunstgriffen befreit und ist doch schließlich zu demselben Resultate gekommen, wie die ursprüngliche Methode.

Alle Spezialfälle dieser allgemeinen Gleichung hatten wir außer dem Gleichung für Kurven speziellsten Fall mit dem Paraboloid, dessen Auflösung sie zu einem dem obigen ganz ähnlichen Resultate führt, nämlich

die Gleichung des Verfolgungsproblems, die auf eine logarithmische Spirale führte, ergeben.

Nun sehen aber doch die Lösung unserer jetzigen Differentialgleichung und die Lösung des Verfolgungsproblems so verschieden aus, wie nur irgend zwei ganz fremde Formeln aussehen können.

Die folgende Zwischenrechnung soll uns nun zeigen, wie hier der Zusammenhang hergestellt werden kann.

Unsere allgemeine Gleichung lautete

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y + \beta x}{\gamma \cdot y + \delta \cdot x},$$

die Gleichung des Verfolgungsproblems war

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \operatorname{tg} \vartheta \cdot x}{-\operatorname{tg} \vartheta \cdot y + x},$$

die Koeffizienten der allgemeinen Gleichung haben also folgende Werte

$$\alpha = 1, \quad \beta = tg\,\vartheta, \quad \gamma = -tg\,\vartheta, \quad \delta = 1.$$

Darnach bestimmen sich die in der Auflösung eingeführten Grössen ρ und λ folgendermaßen:

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha-\delta) + \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma} = -i$$

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha-\delta) - \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma} = +i,$$

$$\rho_1 = \frac{\alpha+\delta + \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2} = 1 + i\,tg\,\vartheta$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha+\delta - \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\cdot\gamma}}{2} = 1 - i\,tg\,\vartheta.$$

Für die neu eingeführten Koordinatenachsen η und ξ bekommen wir dann folgende Werte

$$\xi = y - \lambda_2 x = y - ix$$

$$\eta = y - \lambda_1 x = y + ix$$

Die allgemeinen Lösung

$$\frac{\eta^{\rho_1}}{\xi^{\rho_2}} = K,$$

lautet also in unserem Falle

$$\frac{(y+ix)^{1+i\,tg\,\vartheta}}{(y-ix)^{1-i\,tg\,\vartheta}} = K.$$

dies ist gleich

$$\left(\frac{y+ix}{y-ix}\right)^{1}\left[(y+ix)(y-ix)\right]^{i\cdot tg\,\vartheta} = K,$$

oder wenn ich den ersten Faktor mit i erweitere

$$\left(-\frac{x-iy}{x+iy}\right)\left(x^2+y^2\right)^{i\cdot tg\,\vartheta} = K.$$

Nun führe ich Polarkoordinaten ein

$$x = r\cdot\cos\omega\;, \quad y = r\cdot\sin\omega,$$

dann ist nach der Eulerschen Formel

$$x+iy = r\cdot e^{i\omega} \qquad x-iy = r\cdot e^{-i\cdot\omega},$$

so daß unsere Gleichung lautet

$$-e^{-2i\omega}\cdot r^{2i\cdot tg\,\vartheta} = K$$

oder

$$r = -K^{\frac{1}{2i\,tg\,\vartheta}}\cdot e^{\frac{\omega}{tg\,\vartheta}}$$

und wenn ich hier

$$-K^{\frac{1}{2i}} = e^{C}$$

einsetze, so erhalte ich die Gleichung in der früheren Form

$$\underline{r = e^{\frac{\omega+C}{tg\,\vartheta}}}$$

Also hat sich wirklich die Gleichung der

logarithmischen Spirale als ein Spezialfall der letzten Gleichung ergeben, indem wir durch das Imaginäre hindurchgingen.

Wir wollen nun diesen Gedankengang, der uns zu der zweiten Lösung der letzten Differentialgleichung geführt hat, daß nämlich Verhältnisse, die in Räumen von niederen Dimensionen sehr verwickelt erscheinen, häufig klarer werden, wenn wir als Projektionen aus Räumen von höheren Dimensionen auffaßt, auch auf das Problem der geodätischen Linien anwenden.

Wir nehmen an, es sei eine Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben, und wir führen nun einen neuen Parameter t ein, dem wir die Bedeutung der Zeit beilegen.

Statt also die geodätischen Linien auf einer Fläche rein geometrisch zu definieren,

durch die Lage der Osculationsebene, wie wir es bisher taten, werden wir sie als Funktionen eines Punktes betrachten, der sich auf einer Fläche bewegt, wir gehen also in Mechanik.

x, y, z müssen wir auffassen als Funktionen von t, die Bewegung soll ohne äussere Kräfte vor sich gehen, die Fläche reibungslos sein.

Für die geodätische Linie muss folgende Determinante verschwinden (nach unserer früheren Ableitung)

$$\begin{vmatrix} F_x, & F_y, & F_z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun $F(x,y,z) = 0$ ist und x, y, z Funktionen von t sind, so ist sowohl

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad , \text{ wie } \quad \frac{d^2F}{dt^2} = 0.$$

Wenn man sich diese Differentiation wirklich ausgeführt denkt, so ist

$$0 = \frac{dF}{dt} = F_x \cdot x' + F_y \cdot y' + F_z \cdot z'$$

und

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2F}{dt^2} = {} & F_x \cdot x'' + F_y \cdot y'' + F_z \cdot z'' \\ & + \left[F_{xx} \cdot x' + F_{xy} \cdot y' + F_{xz} \cdot z'\right] \cdot x' \\ & + \left[F_{xy} \cdot x' + F_{yy} \cdot y' + F_{yz} \cdot z'\right] y' \\ & + \left[F_{xz} \cdot x' + F_{yz}\, y' + F_{zz} \cdot z'\right] \cdot z' \end{aligned}$$

Wenn wir in dieser letzten Gleichung die gleichen Glieder zusammenziehen, so nimmt sie eine Gestalt an, die wir als die „Hülfsformel" bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} 0 = {} & F_x \cdot x'' + F_y \cdot y'' + F_z \cdot z'' + F_{xx} \cdot x'^2 + 2 F_{xy} \cdot x' y' \\ & + F_{yy} \cdot y'^2 + 2 F_{xz} \cdot x' z' + 2 F_{yz} \cdot y' z' + F_{zz} \cdot z'^2 . \end{aligned}$$

Da der Massenpunkt keinen Kräften unterliegt als der Reaktion der Fläche, so sind die Komponenten der Beschleuni-

ganz den Componenten der Normalen proportional, es ist also

$$x'' = \lambda \cdot F_x$$
$$y'' = \lambda \cdot F_y$$
$$z'' = \lambda \cdot F_z .$$

Der Proportionalitätsfactor λ bestimmt sich durch Einsetzen der Werthe des x'', y'', z'' in die Hülfsformel zu

$$\lambda = - \frac{F_{xx} \cdot x'^2 + 2 F_{xy} \cdot x' \cdot y' + F_{yy} \cdot y'^2 + 2 F_{xz} \cdot x' z' + 2 F_{yz} \cdot y' \cdot z' + F_{zz} \cdot z'^2}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Die Centrifugalkraft des Punktes ~~ist~~ besitzt nach dem Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion ~~in~~ die Componenten

$$-\lambda \cdot F_x , \quad -\lambda \cdot F_y , \quad -\lambda \cdot F_z .$$

Setze ich die oben gefundenen Werthe in die Determinante ein, deren Verschwinden für die geodätischen Linien charakteristisch war, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} F_x , & F_y , & F_z , \\ x' , & y' , & z' \\ \lambda \cdot F_x , & \lambda F_y , & \lambda F_z \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist aber sicher gleich Null, da sie zwei gleiche Zeilen besitzt; die Bedingung der geodätischen Linie ist also erfüllt, unser Punkt beschreibt eine geodätische Linie.

Wir bekommen alle geodätischen Linien, da wir nicht nur die Ausgangsstelle, sondern auch die ursprüngliche Richtung beliebig wählen können, die Bahnkurven des mechanischen Problems sind mit den geodätischen Linien der Fläche überhaupt identisch.

Diese allgemeinen Betrachtungen wollen wir auf eine Rotationsfläche

$$z = \chi(\rho),$$

wo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ ist.

Es ist also

$$F = z - \chi(\rho) = 0$$

Die Komponenten der Beschleunigung bilden hier folgendes Gleichungssystem:

$$x'' = \lambda \cdot F_x = -\lambda \cdot \chi' \cdot \frac{x}{\rho}$$

$$y'' = \lambda \cdot F_y = -\lambda \cdot \chi' \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$z'' = \lambda \cdot F_z = \lambda$$

Für unsere weiteren Untersuchungen brauchen wir noch den Wert

$$\frac{dz}{dt} = \chi' \left(\frac{x}{\rho} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\rho} \cdot \frac{dy}{dt} \right).$$

Bei unseren früheren rein geometrischen Betrachtungen hatten wir für geodätische Linien auf Rotationsflächen die Gleichung

$$\rho(1+\chi'^2) \cdot \frac{d^2\omega}{d\rho^2} + \left[2(1+\chi'^2) - \rho \cdot \chi' \cdot \chi''\right] \cdot \frac{d\omega}{d\rho} + \rho^2 \left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^3 = 0.$$

gefunden.

Wir hatten diese Gleichung integriert, dadurch daß wir ~~für~~ $\frac{d\omega}{d\rho} = R$ setzten. Dann gelang es uns für das entstehende einfache Integral einen Multiplikator zu finden und so ein „erstes Integral", d. h. eine Gleichung, die nur noch den ersten Differentialquotienten enthält,

zu gewinnen. Dieses erste Integral führt uns dann zum Liouvilleschen Satz, den wir in der Folge mit Vorteil anwenden.

Diese höchst komplizierte Rechnung wird sich nun bei unserer mechanischen Betrachtungsweise gewaltig vereinfachen. Es wird uns ohne alle Zwischenrechnung gelingen, zwei erste Integrale herzustellen, den sog. „Flächensatz" und den „Satz der lebendigen Kraft". Wenn man aus diesen beiden Gleichungen dann die Zeit eliminiert; dann hat man unmittelbar den Liouville=schen Satz, der früher nur auf Grund umständlicher Rechnung herauskam.

Der Flächensatz:

Wenn ich in dem oben für die Komponenten der Beschleunigung aufgestellten Gleichungssystem die erste Gleichung mit y, die zweite mit x multipliziere und die erstere von der zweiten subtrahiere, so ergibt sich

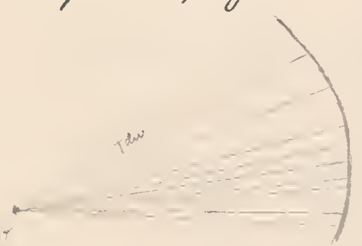
$$x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - y \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

eine Gleichung, die ich sofort integrieren kann.

$$x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} = C.$$

Diese Gleichung heisst der Flächensatz, denn er bedeutet geometrisch interpretiert das folgende.

Wenn ich die geodätische Linie auf die (XY) Ebene projiziere und vom Anfangspunkte O aus die Radienvektoren so ziehe, dass kleine Sektoren mit dem Öffnungswinkel dw entstehen, so sagt der Flächensatz aus, dass



der Inhalt eines solchen Sektors $\frac{\rho^2 dw}{2}$, dividiert durch das Zeitelement dt, in dem das zugehörige Stück der geodätischen Linie durch-

beschrieben wird, gleich $\frac{C}{2}$ ist, also:

$$\frac{\rho^2 d\omega}{dt} = C.$$

Dass in der That diese Formel mit der obigen Formel

$$x\cdot\frac{dy}{dt} - y\cdot\frac{dx}{dt} = C$$

identisch ist, sieht man leicht, wenn man in der letzteren Polarkoordinaten einführt,

$$x = \rho\cdot\cos\omega \quad , \quad y = \rho\cdot\sin\omega.$$

Es ist dann

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cdot\cos\omega - \rho\cdot\sin\omega\cdot\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cdot\sin\omega + \rho\cdot\cos\omega\cdot\frac{d\omega}{dt}.$$

Wenn wir diese Werte einsetzen, so ergiebt sich in der That

$$\rho^2\cdot\frac{d\omega}{dt} = C.$$

Der Flächensatz sagt also aus, dass die kleinen Dreiecke, welche der Radiusvektor in auf einander folgenden Zeitelementen überstreicht,

einen Flächeninhalt haben, der proportional der Zeit ist.

<u>Der Satz der lebendigen Kraft:</u>

Wenn wir in den oben angegebenen Gleichungssystemen für die Beschleunigungen die erste Gleichung mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$, die dritte mit $\frac{dz}{dt}$ multiplizieren und dann alle drei addieren, so erhalten wir

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt}=\lambda\left[\frac{dz}{dt}-\chi'\left(\frac{x}{\rho}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\rho}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

Nun ist ja oben

$$\frac{dz}{dt}=\chi'\left(\frac{x}{\rho}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{y}{\rho}\cdot\frac{dy}{dt}\right),$$

also wird die rechte Seite gleich Null,

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Diese Gleichung ist integrabel, sie ergiebt

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\text{Const.}$$

Die rechte Seite stellt die lebendige Kraft

unseres Punktes dar, diese ist konstant, wir bezeichnen sie mit k und haben also

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2k$$

Die Bedingungen für die geodätische Linie sind also erstens die, daß unser Punkt mit konstanter Geschwindigkeit seine Bahn durchläuft und gleichzeitig dem Flächensatz befriedigt.

Um von diesen beiden ersten Integralen aus wieder auf den Liouvilleschen Satz in der früheren Gestalt zu kommen, sind Polarkoordinaten einzuführen, wodurch t von selbst heraus fallen wird.

Setze ich in dem Flächensatze für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die früher in Polarkoordinaten berechneten Werte ein, so ergibt sich

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2k.$$

Und da $\frac{dz}{dt} = \chi' \cdot \frac{d\rho}{dt}$ ist, so vereinfacht sich unsere Gleichung weiter zu

$$\left(1+\chi'^{2}\right)\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{2}+\rho^{2}\cdot\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^{2}=2h.$$

Erhebe ich nun noch die Gleichung des Flächensatzes zum Quadrat,

$$\rho^{4}\cdot\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^{2}=C_1^{2}$$

und dividiere das Quadrat durch die letzte Gleichung, so erhalte ich damit die Gleichung des Liouvilleschen Satzes in der früheren Form

$$\frac{\rho^{4}\cdot d\omega^{2}}{\left(1+\chi'^{2}\right)\cdot d\rho^{2}+\rho^{2}\cdot d\omega^{2}}=K_1^{2}$$

wobei ich $\frac{C_1^{2}}{2h}=K^{2}$ gesetzt habe.

Es ließen sich noch eine Menge von Beispielen angeben, wie wir durch geschickte Einführung neuer Veränderlicher einen komplizierten Gleichung auf eine unserer 4 Grundformen zurückführen könnten. Es mag jedoch hiermit genug sein und wir wollen nunmehr übergehen zu dem zweiten großen Kapitel dieses Abschnitts zu den

Funktionen, die durch Differentialgleichungen definiert werden.

Wir werden in dem engen Rahmen dieser Vorlesung vor allem zwei Klassen von Funktionen kennen lernen, 1.) die Besselschen Funktionen und 2.) die Kugelfunktionen.

Die Besselschen Funktionen stellen eine neue Art von transcendenten Funktionen vor, die man auch durch Reihenentwicklung und bestimmte Integrale darstellen kann. Die Kugelfunktionen, die mit den Namen Legendre u. Laplace verknüpft sind, werden uns insofern etwas enttäuschen, als sie an sich keine neuen transcendenten Funktionen sind, sondern sich sogar auf Polynome zurückführen lassen.

Die Besselschen Funktionen. x V

Eine Besselsche Funktion schreibt man in der Form

x V. = (cfr: Klein: Differential- u. Integralrechn. II. pg. 196 u. ffg.)

$$y = J_n(x),$$

wo n gewöhnlich die Reihe der ganzen Zahlen ($n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$) durchläuft.

Eine solche Besselsche Funktion n.ten Grades ist allgemein definiert durch die Differential-gleichung

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d J_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \cdot J_n(x) = 0.$$

Diese Gleichung wird eine allgemeine Lösung haben von der Form

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2,$$

wo y_1 und y_2 Partikularlösungen der Gleichung sind.

Es giebt nun eine Partikularlösung, die man als „die Besselsche Funktion erster Art" bezeichnet. Sie ist dargestellt durch folgende Reihe

$$J_n = \frac{x^n}{2.4.6.\ldots.2n}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)\cdot(2n+4)} - \frac{x^6}{2.4.6.(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + - \ldots\ldots\right]$$

oder durch die Reihenformel

$$J_\kappa = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\kappa+2\nu}}{\nu!\,(\kappa+\nu)!}$$

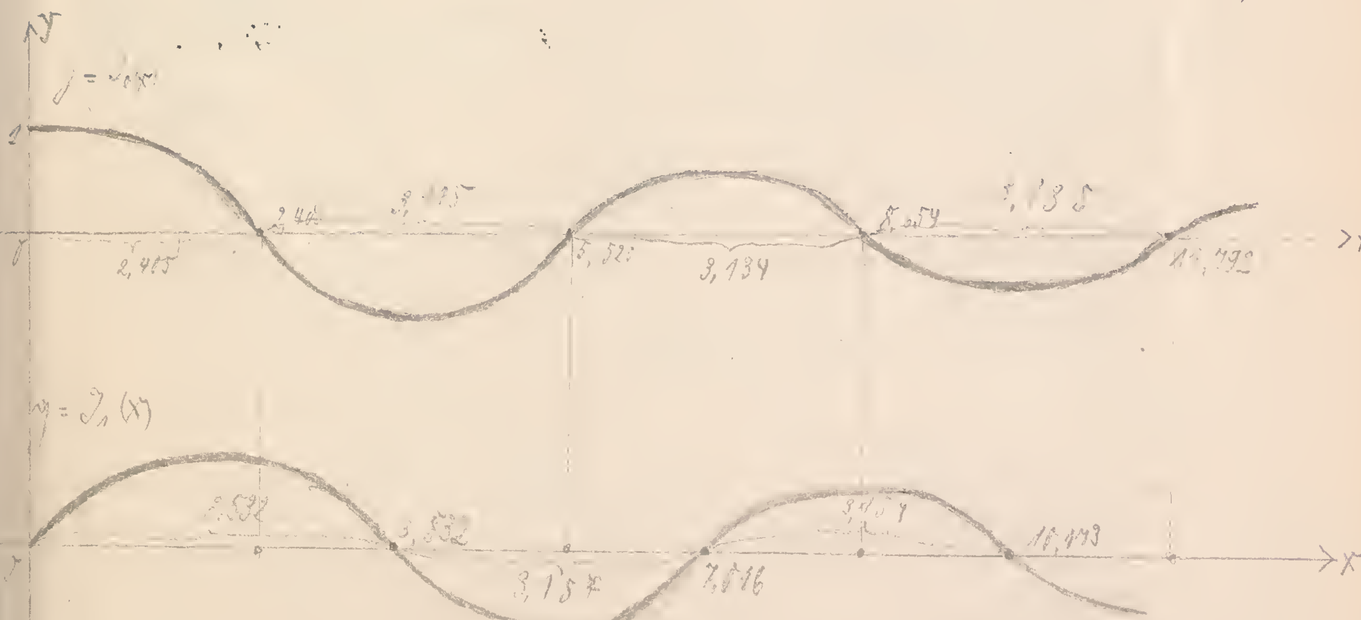
Die Reihe für $J_\kappa(x)$ gehört zu denjenigen Potenzreihen, welche für alle endlichen Werte von x convergieren, weil der Nenner des ~~des~~ einzelnen Gliedes, so groß auch das x sein mag, bei hinreichend großem ν sehr viel rascher anwächst als der Zähler. Man bezeichnet eine solche Funktion als eine ganze transcendente Funktion. Zwischen drei ~~J~~ aufeinander folgenden Besselschen Funktionen besteht nun noch folgende recurrierende Relation.

$$\frac{2\kappa\, J_\kappa(x)}{x} = J_{\kappa-1}(x) + J_{\kappa+1}\,x.$$

Man kann also $J_{\kappa+1}(x)$ mit Hülfe dieser recurrenten Relation in einfacher Weise berechnen, wenn man $J_{\kappa-1}$ und J_κ kennt.

Wenn man nun $J_{x-1} = J_0$ und $J_x = J_1$ setzt, so sieht man, dass sich die Besselschen Funktionen mit höherem Index in einfacher Weise aus diesen Funktionen J_0 und J_1 zusammensetzen. Die beiden Funktionen J_0 und J_1 werden daher zunächst unsere Aufmerksamkeit auf sich ziehen.

Um einen Überblick über den Verlauf der Funktionen zu gewinnen, zeichnen wir uns zunächst die Kurven, $y = J_0(x)$ und $y = J_1(x)$



Zur Konstruktion dieser Kurven haben wir zunächst kein anderes Mittel, als uns für eine Reihe von Werthen des x die zugehörigen Ordinatenwerte des y zu berechnen und danach einen passenden Kurvenzug zu interpoliren.

Diese Berechnung ergiebt, dass wir für J_0 eine immer flacher werdende Wellenlinie erhalten, welche in $x = 0$ mit dem Ordinatenwerte $y = 1$ einsetzt und die X Achse ~~in~~ den Punkten $x = 2{,}405$, $= 5{,}520$, $= 8{,}654$, $= 11{,}792$, u. s. w. schneidet. Die Intervalle von einem Schnittpunkt der Kurve mit der X Achse zu dem nächstfolgenden sind bzw. $= 0{,}2405$, $= 3{,}125$, $= 3{,}134$, $= 3{,}138$; sie wachsen also mit wachsendem x und nähern sich der Grenze π. ($\pi = 3{,}14\,15926..$)

Die Kurve $y = J_1(x)$ ist ebenfalls eine immer flacher werdende Wellenlinie, die aber im Koordinatenanfangspunkte ansetzt und bei der die aufeinander folgenden Abstände

zwischen den Nullstellen ($x_1 - x_2 = 3,832, = 3,184, = 3,157$) abnehmen und sich nach der Grenze π nähern. Wenn ich die Nullstellen der Funktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$ betrachte, (dies sind die Wurzeln der Gleichungen $J_0(x) = 0$ und $J_1(x) = 0$), so finde ich, daß sie sich separieren.

Diese ~~an~~ den einfachen Fällen gewonnenen Erfahrungen dehnen wir auf alle Fälle aus und behaupten nun in voller Allgemeinheit:

„Alle diese Kurven $J_k(x)$ stellen immer flacher werdende Wellenlinien dar, bei denen die Abstände zwischen zwei Wurzeln je weiter hinaus immer mehr gleich π werden, und die so variiert sind, daß die Wurzeln separiert werden."

Die Angaben über die Separation der Wurzeln aufeinanderfolgender J ist in Übereinstimmung mit den entwickelten Relationen.

Die Frage ist nun, wie lässt sich der aufgestellte allgemeine Satz beweisen? Zu diesem Zwecke müssen wir die gegebene Differentialgleichung etwas umformen.

$$\frac{d^2 J_\kappa}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\kappa}{dx} + \left(1 - \frac{\kappa^2}{x^2}\right)\cdot J_\kappa = 0.$$

Ich führe als neue Veränderliche ein

$$y_\kappa = x^{\frac{1}{2}}\cdot J_\kappa;$$

Es ist also

$$y'_\kappa = x^{\frac{1}{2}}\cdot J'_\kappa + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot J_\kappa$$

und

$$y''_\kappa = x^{\frac{1}{2}}\cdot J''_\kappa + x^{-\frac{1}{2}}\cdot J'_\kappa - \tfrac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot J_\kappa$$

Wenn ich die gegebene Differentialgleichung nun mit $x^{\frac{1}{2}}$ multipliziere, so habe ich

$$x^{\frac{1}{2}}\cdot J''_\kappa + x^{-\frac{1}{2}}\cdot J'_\kappa + \left(\frac{x^2-\kappa^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot J_\kappa = 0$$

Es berechnen sich dann die einzelnen Terme zu

$$x^{\frac{1}{2}}\cdot J''_\kappa = y''_\kappa - x^{-1}\cdot y'_\kappa + \tfrac{3}{4}x^{-2}\cdot y_\kappa$$

$$x^{-\frac{1}{2}}\cdot J'_\kappa = x^{-1}\cdot y'_\kappa - \tfrac{1}{2}x^{-2}\cdot y_\kappa$$

$$\left(\frac{x^2-\kappa^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot J_\kappa = \left(1 - \frac{\kappa^2}{x^2}\right)\cdot y_\kappa$$

Wenn ich diese Werte in die letzte Gleichung einsetze, so erhalte ich

$$y''_{\varkappa} + \left(1 - \frac{\varkappa^2}{x^2} + \frac{1}{4x^2}\right) \cdot y_{\varkappa} = 0$$

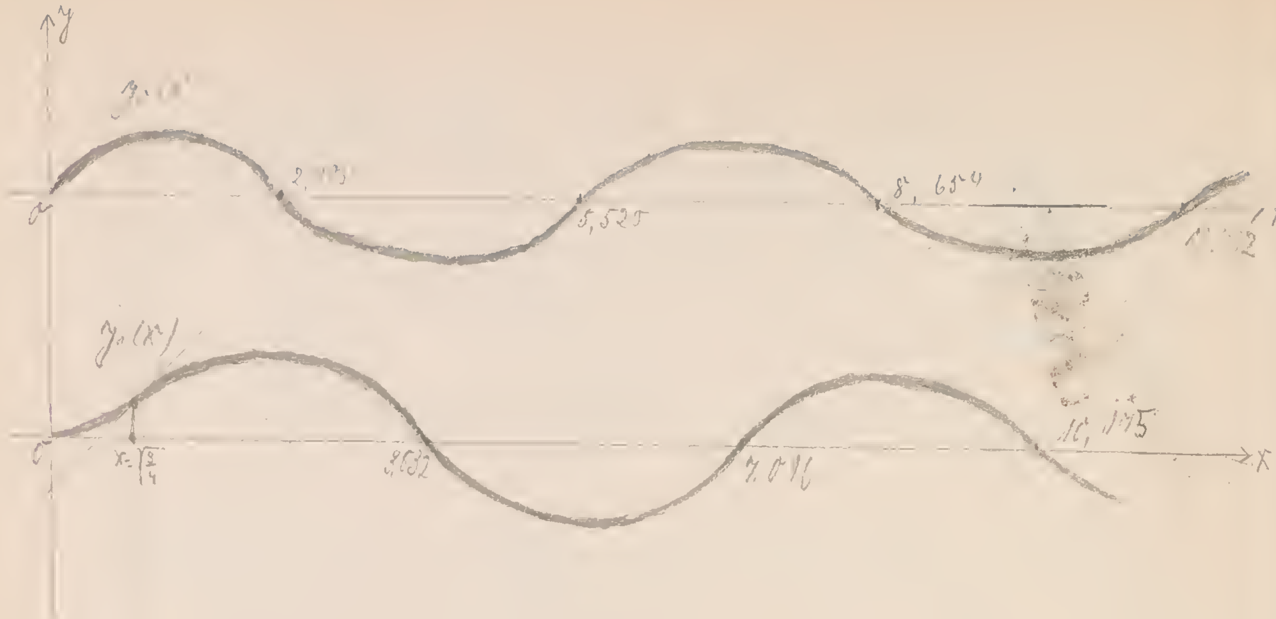
oder

$$y''_{\varkappa} + \left(1 + \frac{1 - 4\varkappa^2}{4x^2}\right) y_{\varkappa} = 0.$$

Wenn wir nun zunächst wieder die Funktionen $y_0(x)$ und $y_1(x)$ betrachten, und uns zunächst ihre Kurven zeichnen, so finden wir, da die Gleichungen von demselben Grade gebildet sind, daß die Kurven $y_0(x)$ und $y_1(x)$ dieselben Nullstellen und denselben qualitativen Verlauf haben wie die Kurven $J_0(x)$ und $J_1(x)$, nur daß sie sich bei $x = 0$ anders verhalten.

Hier setzt nämlich die Kurve $y_0(x)$ im Koordinatenanfangspunkte ein, ~~weil~~ und die Kurve $y_1(x)$ hat im Punkte $x = 0$ die X Achse zur Tangente.

In der Gleichung



$$\frac{y''_x}{y_x} = -\left(1 + \frac{1-4x^2}{4x^2}\right)$$

kann ich für sehr grosse x das Glied

$$\frac{1-4x^2}{4x^2} = 0$$

setzen und erhalte so die Gleichung

$$\frac{y''_x}{y_x} = -1,$$

die ich sofort integrieren kann, sodass sich ergibt

$$y_x = C_x \sin(x - x_x)$$

Die Kurven y_x verlaufen bei sehr grossen

Werthe des x annähernd wie Sinuslinien.
Die Kurven

$$y_\varkappa = y_\varkappa \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

werden also bei grossen Werthen des x annähernd so verlaufen wie die Kurven

$$y = \frac{C_\varkappa \cdot \sin (x - x_\varkappa)}{\sqrt{x}},$$

womit das, was wir über den Abstand aufeinander folgender Nullstellen und über das immer flacher Werden der Kurve gesagt haben, seine Bestätigung findet.
Bei kleinen Werthen von x müssen für den einzelnen Fall besondere Untersuchungen angestellt werden. Wir daher untersuchen wieder die beiden Fälle y_0 und y_1.
Im Falle y_0 ist $\varkappa = 0$, also ist

$$\frac{y_0''}{y_0} = -1 - \frac{1}{4x^2}$$

negativ. Ist aber $\frac{y''}{y}$ negativ, so steht

die Kurven der X-Achse ihre konkave Seite zu, im andern Falle die konvexe Seite.

Die Kurve y_0 kehrt also der X Achse dauernd die konkave Seite zu.

Im Falle y_1 ist $\kappa = 1$, also ist der Quotient

$$\frac{y_1''}{y_1} = -1 + \frac{3}{4x^2}$$

Man sieht, dass der Quotient für $x < \sqrt{3/4}$ positiv, für $x > \frac{3}{4}$ negativ ist.

Die Kurve y_1 wird also für $x < 3/4$ der X Achse die konvexe Seite zukehren, für $x > 3/4$ aber allemal wieder die konkave Seite.

Um den weiteren Verlauf der Kurve y_0 qualitativ zu beurteilen, überlegen wir uns, dass bei der reinen Sinuslinie der Quotient

$$\frac{y''}{y} = -1$$

ist, bei uns aber

$$\frac{y_0''}{y_0} = -1 - \frac{1}{4x^2},$$

also algebraisch kleiner, absolut etwas größer als bei der Sinuslinie, und schließen daraus, daß bei einem Nullpunkt beginnend die Kurve etwas stärker gekrümmt ist als die Sinuslinie, die Differenz zwischen 2 Nullstellen also etwas kleiner als bei dieser (mithin kleiner als π) ist. Bei größerem x wird aber dieser Unterschied geringer.

Bei der Kurve y_1 ist umgekehrt der Quotient

$$\frac{y_1''}{y_1} = -1 + \frac{3}{4x^2}$$

algebraisch etwas größer als bei der Sinuslinie. Die Kurve wird also etwas schwächer gekrümmt sein von einem Nullpunkt beginnend, und mithin die Differenz zwischen 2 Nullstellen größer als bei der Sinuslinie.

Wir kommen nun zu der Frage, welche Bedeutung haben die Besselschen Funktionen

in der mathematischen Physik.

Wir wollen hier als Beispiele zwei Probleme behandeln: die Gleichung des Potentials und die Gleichung der Schwingungen einer elastischen Membran.

Die Gleichung des Potentials lautet

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Die Differentialgleichung für die Schwingungen einer elastischen Membran ist bei geeigneter Wahl der Zeit- und Längeneinheit:

$$2.) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Man versteht nun unter der Lösung dieser Gleichungen in der theoretischen Physik nicht die allgemeine Lösung, sondern gewisse ausgezeichnete Partikularlösungen, die wir sehr leicht finden können mit Hülfe der Besselschen Funktionen.

Wir führen in die Gleichung 1) $u = \varphi(x,y) \cdot e^z$ und in die Gleichung 2.) $u = \varphi(x,y) \cdot \sin t$ als Partikularlösungen ein.

Bei diesen speziellen Ansätzen wird sich in der Gleichung 1.) e^z, in der Gleichung 2.) $\sin t$ als ein Faktor herausheben und beide partiellen Differentialgleichungen führen auf die eine partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varphi = 0$$

zurück, die nur noch 2 Variabeln x und y enthält.

Diese Gleichung behandeln wir nun weiter, dadurch, dass wir Polarkoordinaten $x = \rho\cdot\cos\omega$, $y = \rho\cdot\sin\omega$ einführen.

Wir haben dann die Relation

$$\varphi(x,y) = \varphi(\rho\cdot\cos\omega,\ \rho\cdot\sin\omega),$$

die wir partiell zu differenzieren haben:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\cos\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\sin\omega$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = -\rho\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\sin\omega + \rho\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\cos\omega$$

und die zweiten Differentialquotienten werden

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\cos^2\omega + 2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\sin\omega\cdot\cos\omega + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\sin^2\omega$$

und

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = \rho^2\cdot\sin^2\omega\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\rho^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y} + \rho^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\cos^2\omega$$
$$-\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\cos\omega - \rho\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\sin\omega$$

Wenn ich nun unter Benutzung der so berechneten Werte die Relation

$$\rho^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + \rho\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$$

bilden, so ergiebt sich

$$\rho^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + \rho\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\rho^2,$$

also ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}$$

Diese Relation ist bei Einführung von Polar-Koordinaten in partielle Differentialgleichungen sehr oft äußerst nützlich.

In unserem Falle nimmt unsere partielle

Differentialgleichung nunmehr folgende Gestalt an

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} + \varphi = 0.$$

Hier führen wir nun eine Partikularlösung von der Art ein, daß wir eine neue Funktion $f(\rho)$ erhalten, die nur noch von ρ abhängt. Wir setzen zu dem Zwecke

$$\varphi = e^{i\kappa\omega}\cdot f(\rho).$$

[Da nach der Eulerschen Formel

$$e^{i\kappa\omega} = \cos\kappa\cdot\omega + i\sin\kappa\cdot\omega$$

ist, so wären in diesem Falle auch

$$\varphi = \cos\kappa\cdot\omega\cdot f(\rho) \quad \text{und}$$

$$\varphi = \sin\kappa\cdot\omega\cdot f(\rho)$$

Partikularlösungen unserer partiellen Differentialgleichung.]

Beim Einsetzen dieses Wertes hebt sich $e^{i\kappa\omega}$ als ein Faktor heraus und wir bekommen folgende gewöhnliche Differen-

tialgleichung.

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} \cdot f'(\rho) + \left(1 - \frac{\kappa^2}{\rho^2}\right) f(\rho) = 0.$$

Diese Differentialgleichung definiert uns aber gerade die Funktion von Bessel

$$J_\kappa(\rho),$$

diese Besselsche Funktion ist also ihre Lösung. Wir haben somit als Partikularlösung der partiellen Differentialgleichung für φ

$$\underline{\varphi = e^{i\kappa\omega} \cdot J_\kappa(\rho)}$$

Die partikuläre Lösung unserer ursprünglich gegebenen partiellen Differentialgleichung für das Potential war

$$u = e^{z} \cdot \varphi(x, y),$$

die partikuläre Lösung ist also

$$\underline{u = e^{z} \cdot e^{i\kappa\omega} \cdot J_\kappa(\rho)},$$

Für die Differentialgleichungen der Schwingungen einer elastischen Membran hatten wir eine Partikularlösung angesetzt von der Form $u = \sin t \cdot \varphi(x, y)$,

wir finden also die partikulären Lösungen:

$$\underline{u = \sin t \cdot e^{i\varkappa w} \cdot J_\varkappa(\rho)}$$

Wir fragen nun natürlich nach der geometrischen Bedeutung dieser Differentialgleichungen, und da wollen wir der leichteren Auffassung wegen diese letzte Gleichung der Schwingungen einer elastischen Membran geometrisch interpretieren.

Die Schwingungen der Membran werden so vor sich gehen, daß für die Stellen der Gleichung

$$e^{i\varkappa w} \cdot J_\varkappa(\rho) = 0$$

Knotenlinien entstehen.

Aus dieser Gleichung folgt

1) $J_\varkappa(\rho) = 0$,

d. h. es werden die Nullstellen der Bessel'schen Funktion, also gewisse konzentrische Kreise um den Anfangspunkt Knotenlinien sein.

Wir erhalten aber

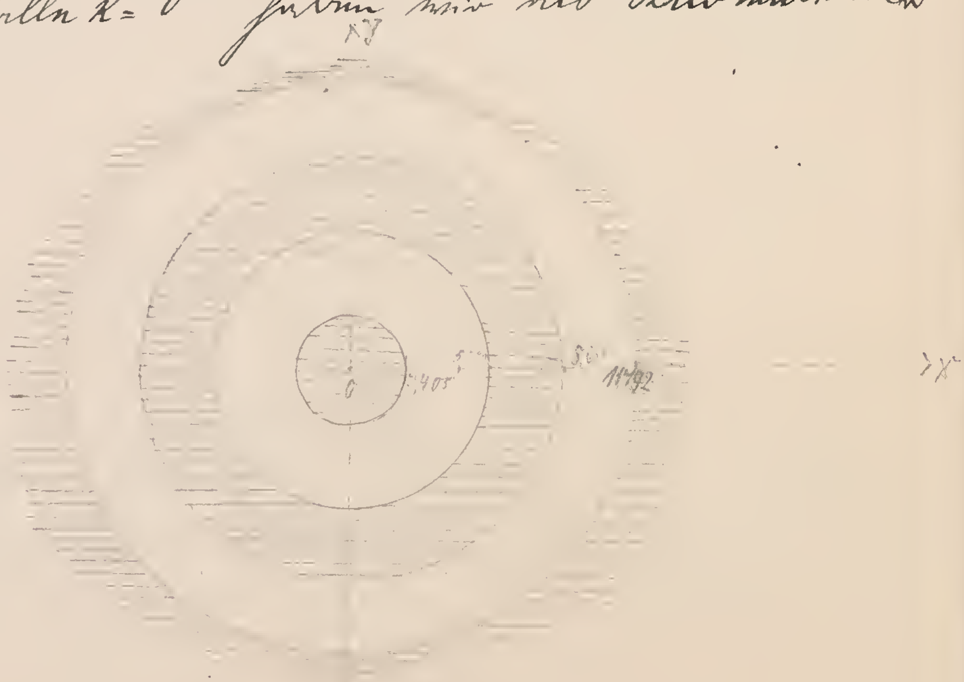
$$2.)\ e^{i x . w} = \cos x . w + i \sin x w = 0.$$

Es treten also als neue Knotenlinien die Geraden auf, die die obige Gleichung befriedigen. Dies sind also x gerade Linien, die sich im Anfangspunkte unter gleichen Winkeln kreuzen.

Wir wollen uns den Schwingungszustand zeichnerisch darstellen für $x = 0$ und $x = 1$.

1) $x = 0$

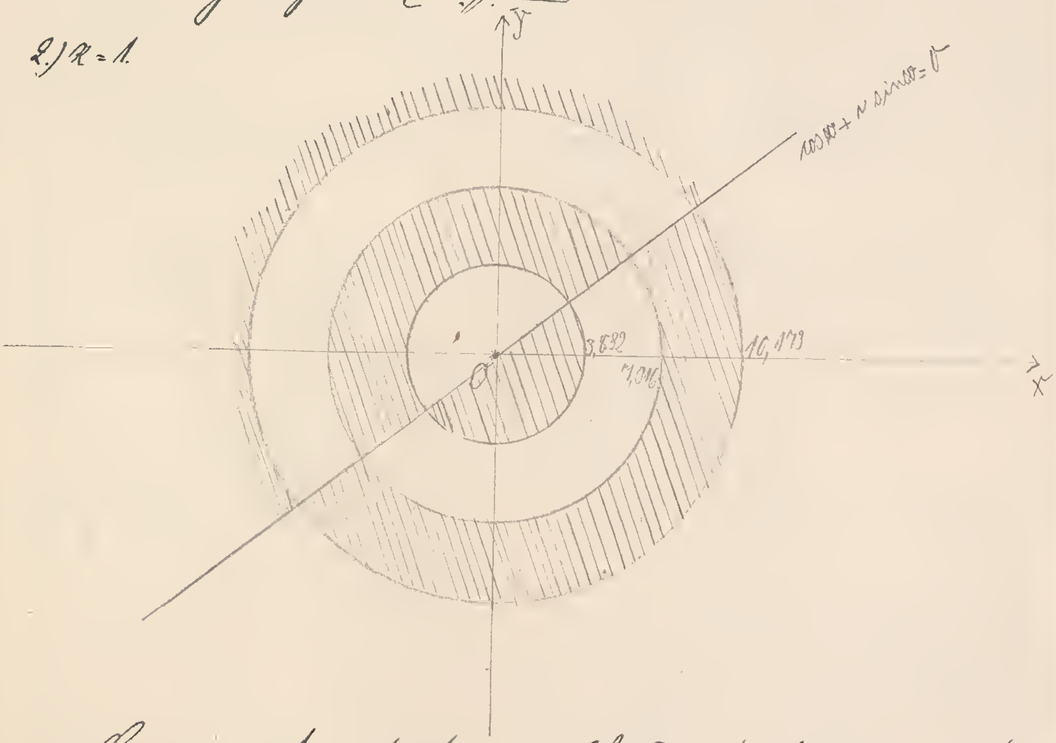
Im Falle $x = 0$ haben wir als Knotenlinien



nur die konzentrischen Kreise, die mit den früher erwähnten Nullstellen der Besselschen Funktion J_0 als Radien geschlagen worden sind. Der Punkt 0 ist ein Schwingungsbauch. Wenn die schraffierten Teile sich nach vorn bewegen, bewegen sich die weißen Teile nach hinten und umgekehrt.

Fig.

2.) $k = 1$.



Für $k = 1$ treten als Knotenlinien außer den Kreisen, ~~die~~ die mit den Entfernungen der Wurzeln der Gleichung $J_1 = 0$ vom Anfangspunkt als Radien geschlagen sind; also ~~der~~ der Anfangspunkt O selbst

und zweitens die konzentrischen Kreise mit dem Radius $\rho = 3{,}832,\ = 7{,}016,\ = 10{,}173$ u.s.w.

Als zweite Art von Knotenlinien tritt eine gerade Linie auf, die der Gleichung genügt.

$$\cos \omega + i \sin \omega = 0$$

Das ganze Gebiet wird so in einzelne Halbkreise eingeteilt, die schraffierten Teile schwingen nach vorn, während die weißen Teile nach hinten schwingen, und umgekehrt.

Eine sehr viel allgemeinere Lösung als die vorhin angegebene partikulare Lösung

$$u = \sin t \cdot e^{i x \omega} \cdot J_x(\rho)$$

bekommen wir, wenn wir mehrere partikulare Lösungen übereinander lagern und so z.B. bilden

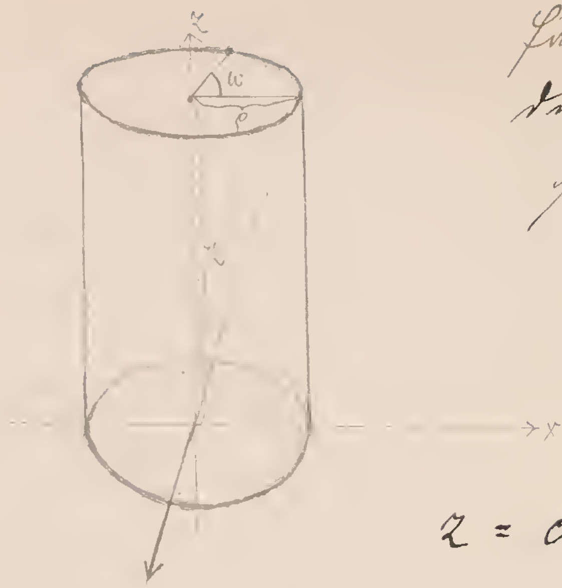
$$u = \sum_0^{\infty} \left(A_x \sin(t - t_x) \cdot \cos x\omega + B_x \cdot \sin(t - t_x) \cdot \sin x\omega \right)$$

Unsere Partikularlösung liefert uns also genügend zahlreiche Bestandteile, um mit ihnen ~~die partikuläre~~ eine allgemeine Lösung

zusammenzusetzen zu können.

Für die Besselschen Funktionen hat man auch wohl den Namen „Cylinderfunktionen" gebraucht. Man bezeichnet nämlich die Koordinaten z, ω, ρ auch wohl als Cylinderkoordinaten. [Einen Sinn hat diese Bezeichnung nur, wenn $\rho = \text{Const}$ ist, da ~~den~~ dann durch die genannten Koordinaten ein Punkt auf dem Cylinder festgelegt wird, dessen Grundkreis mit dem Radius ρ um den Anfangspunkt beschrieben ist. Aber auch in den Fällen, wo nicht $\rho = \text{Const}$ ist, bezeichnet man unzweckmäßigerweise in der mathematischen Nomenklatur die Koordinaten $z, \omega \rho$ als Cylinderkoordinaten].

Da nun in der Potentialtheorie bei Zugrundelegung von Cylinderkoordinaten diese Besselschen Funktionen auftreten, so bezeichnet man sie also auch wohl als Cylinderfunktionen.



Falls wir uns Cylinderkoordinaten eingeführt denken, so würden, wie die Figur veranschaulicht, die Gleichungen

$z = \text{const.}$ — Horizontalebenen, die Gleichungen

$\rho = \text{const.}$ — koaxiale Rotationscylinder, und die Gleichungen

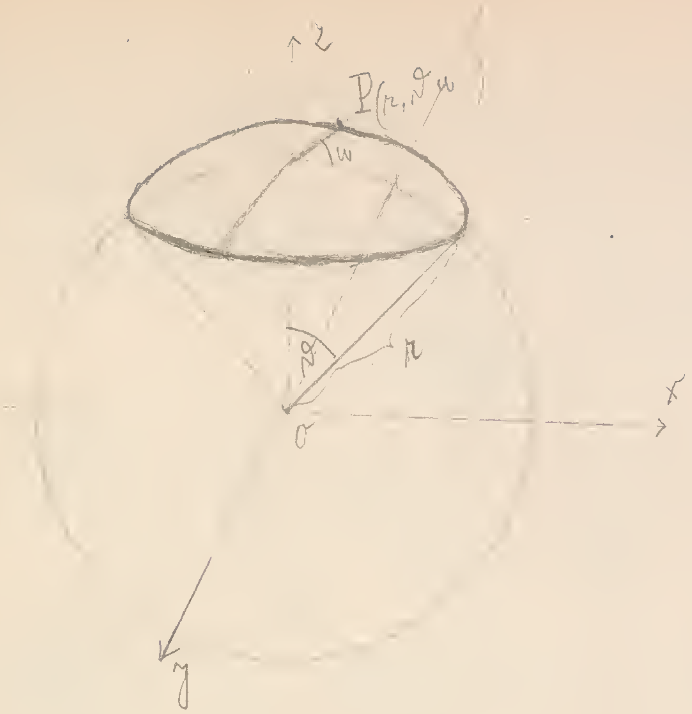
$\omega = \text{const.}$ — Meridianebenen

bedeuten.

Die Kugelfunktionen.

Wir führen an Stelle der Cylinderkoordinaten die räumlichen Polarkoordinaten ein.

Um den Anfangspunkt O ist eine Kugel vom Radius r herumgelegt.



~~Mit dem~~ Ein Punkt P auf dieser Kugel ist dann 1.) durch seine Länge ω bestimmt und 2 durch seine ~~Polhöhe~~ (in unserem Falle vom Pol aus gerechnete) Breite ϑ.

Die Figur veranschaulicht, daß die Flächen $r = \text{const.}$ — konzentrische Kugeln, die Flächen $\vartheta = \text{const.}$ — koaxiale Rotationskegel, die Flächen $\omega = \text{const}$ — Meridianebenen bezeichnen:

Man kann offenbar den Fall der Cylinderkoordinaten als einen Grenzfall

der räumlichen Polarkoordinaten verschaffen, der dadurch entsteht, dass man die Spitze des Kegels mit dem Öffnungswinkel ϑ ins Unendliche rücken lässt.

Wir wollen nun die Gleichung des Potentials

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

die wir bereits mit Hülfe der Besselschen Funktionen integriert haben ~~integriert haben~~, noch einmal behandeln, indem wir statt der rechtwinkligen Koordinaten räumliche Polarkoordinaten einführen. Es ist

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega$$

$$y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega$$

$$z = r \cdot \cos\vartheta .$$

Ich bilde zunächst die ersten partiellen Differentialquotienten, da ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\omega + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\omega}{r} - \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{\sin\omega}{r \cdot \sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\omega + \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin\omega}{r}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{\cos\omega}{r \cdot \sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos\vartheta - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta}{r}$$

Demnach ist

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$tg\,\omega = \frac{y}{x}$$

Nach derselben Weise bilde ich nun weiter die zweiten partiellen Differential-quotienten ~~gleichungen~~, wobei sich ergiebt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{\cos^2\vartheta \cdot \cos^2\omega}{r^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\sin^2\omega}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2\vartheta \cdot \cos^2\omega + \sin^2\omega}{r}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \frac{(\sin^2\omega - 2\sin^2\vartheta \cdot \cos^2\omega) \cdot \cos\vartheta}{r^2 \cdot \sin\vartheta}$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta}$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \vartheta} \cdot \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\omega}{r}$$

$$- 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \omega} \cdot \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega}{r}$$

$$- 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta \cdot \partial \omega} \cdot \frac{\cos\vartheta \, \sin\omega \cdot \cos\omega}{r^2 \cdot \sin\vartheta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\vartheta \cdot \sin^2\omega + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{\cos^2\vartheta \cdot \sin^2\omega}{r^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\cos^2\omega}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\cos^2\vartheta \cdot \sin^2\omega + \cos^2\omega}{r}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{(\cos^2\omega - 2\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\omega) \cdot \cos\vartheta}{r^2 \cdot \sin\vartheta}$$

$$- 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \omega} \cdot \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \vartheta} \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\omega}{r}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \omega} \cdot \frac{\sin\omega \cdot \cos\omega}{r}$$

$$+ 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta \cdot \partial \omega} \cdot \frac{\cos\vartheta \cdot \sin\omega \cdot \cos\omega}{r^2 \cdot \sin\vartheta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2\vartheta}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta}{r^2}$$
$$- 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \vartheta} \cdot \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta}{r}$$

Wenn ich diese drei letzten Gleichungen addiere, so erhalte ich die Gleichung des Potentials in Polarkoordinaten

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}$$
$$+ \frac{\cos\vartheta}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0$$

Die beiden ersten Terme dieses Ausdrucks stellen mit r multipliziert den Differentialquotienten $\frac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2}$, der dritte und vierte Term mit $r^2 \cdot \sin\vartheta$ multipliziert den Differentialquotienten $\frac{\partial\left(\sin\vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}$

dar.

Nach Einsetzen dieser Werte nimmt unsere Gleichung die Gestalt an

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta}\left[\frac{\partial\left(\sin\vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta}\right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0$$

Diese Gleichung ist nun weiter so umzuformen, daß wir als neue Variable

$$\mu = \cos\vartheta$$

so einführen, daß u eine Funktion von r, μ, ω wird.

Im letzten Term tritt dann an die Stelle von $\sin^2\vartheta$ der Wert $(1-\mu^2)$.

Es ist ferner offenbar

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \frac{d\mu}{d\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \sin\vartheta.$$

Infolge dieser Relation nimmt der mittlere Term offenbar folgende Gestalt an

$$\frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\left(\sin\vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\left(-\sin^2\vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu}$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu}$$

Unsere Gleichung des Potentials heißt nunmehr

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\cdot\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]}{\partial \mu} + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0.$$

Diese Umformung der Gleichung des Potentials in Kartesischen Koordinaten in diese letzte Gleichung in räumlichen Polarkoordinaten wurde zuerst ausgeführt von Laplace, man nennt daher die letzte Gleichung „die Laplace-sche Gleichung" des Potentials.

Um nun diese Gleichung zu integrieren und ein Potential u zu finden, setzen wir probeweise

$$u = r^n \cdot e^{i\varkappa\omega} \cdot f(\mu),$$

wir zerlegen also die Funktion $u(r, \mu, \omega)$ in drei Faktoren, von denen jeder nur von einer der drei Variabeln abhängt.

Bei Einsetzen dieser Lösung werden die einzelnen Terme gleich

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(r u)}{\partial r^2} = n.(n+1)\;r^{n-2}\cdot e^{i\kappa\omega}\cdot f(\mu)$$

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} = r^{n-2}\cdot e^{i\kappa\omega}\,\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu}$$

$$\frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\;\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2} = \frac{-r^{n-2}\cdot\kappa^2\cdot f(\mu)\cdot e^{i\kappa\omega}}{1-\mu^2}$$

Wenn ich jetzt diese drei Terme addiere, so hebt sich $r^{n-2}\cdot e^{i\kappa\omega}$ als Faktor heraus und wir erhalten die Gleichung

$$n(n+1)\cdot f(\mu) + \frac{\partial\left[(1-\mu^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} - \frac{\kappa^2\cdot f(\mu)}{1-\mu^2} = 0.$$

Wir befriedigen also in der Tat die partielle Differentialgleichung des Potentials, sobald wir für $f(\mu)$ eine Lösung setzen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\cdot\frac{df}{d\mu}\right]}{d\mu}+\left[n\cdot(n+1)-\frac{\kappa^2}{1-\mu^2}\right]\cdot f(\mu)=0$$

Wir versuchen diese Differentialgleichung zu integriren, indem wir setzen

$$f=(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}\cdot P_\kappa^n(\mu),$$

wo $P_\kappa^n(\mu)$ eine Function ist, die wir später genauer erklären werden.

Es ist also

$$\frac{df}{d\mu}=(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}\cdot P_\kappa^{n\,\prime}(\mu)-\kappa\mu\,(1-\mu^2)^{\frac{\kappa-2}{2}}\cdot P_\kappa^n(\mu),$$

folglich

$$(1-\mu^2)\cdot\frac{df}{d\mu}=(1-\mu^2)^{\frac{\kappa+2}{2}}\cdot P_\kappa^{n\,\prime}(\mu)-\kappa\mu\,(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}\,P_\kappa^n(\mu)$$

Wir finden daher zunächst

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\cdot\frac{df}{d\mu}\right]}{d\mu}=(1-\mu^2)^{\frac{\kappa+2}{2}}\cdot P_\kappa^{n\,\prime\prime}(\mu)-(\kappa+2)\cdot\mu\cdot(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}\cdot P_\kappa^{n\,\prime}(\mu)$$

$$-\kappa\mu\cdot(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}\cdot P_\kappa^{n\,\prime}(\mu)-\kappa\,(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}\cdot P_\kappa^n(\mu)$$

$$+\kappa^2\cdot\mu^2\cdot(1-\mu^2)^{\frac{\kappa-2}{2}}\cdot P_\kappa^n(\mu)$$

Unsere gewöhnliche Differentialgleichung nimmt also, indem sich $(1-\mu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}$ als Faktor heraushebt, die folgende Gestalt an

$$(1-\mu^2)\cdot P_\varkappa^{n\,''}(\mu) - 2(\varkappa+1)\cdot\mu\cdot P_\varkappa^{n\,'}(\mu) + \Big[\, n(n+1) - \frac{\varkappa^2}{1-\mu^2} - \varkappa + \frac{\varkappa^2\mu^2}{1-\mu^2}\Big]\cdot P_\varkappa^n(\mu) = 0$$

Unser Ausdruck

$$u = r^n\cdot e^{i\varkappa\omega}\cdot(1-\mu^2)^{\frac{\varkappa}{2}}\cdot P_\varkappa^n(\mu)$$

genügt der Laplace-schen Differentialgleichung, sobald $P_\varkappa^n(\mu)$ die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigt

$$(1-\mu^2)\cdot P_\varkappa^{n\,''}(\mu) - 2(\varkappa+1)\cdot\mu\, P_\varkappa^{n\,'}(\mu) + \big[n(n+1) - \varkappa(\varkappa+1)\big] P_\varkappa^n(\mu) = 0$$

Eine ganz spezielle Lösung dieser Gleichung nennen wir dann Kugelfunktion, wir verlangen von der speziellen Lösung, daß sich $P_\varkappa^n(\mu)$ als Polynom in μ, also als ganze rationale Funktion von μ ergiebt.

Wir setzen daher

$$P^m_\varkappa(\mu) = C\left(\mu^l + a\cdot\mu^{l-1} + b\cdot\mu^{l-2} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

und gehen mit diesem Ansatze in die Differentialgleichung hinein.

Es ergeben sich dann, abgesehen von der nachher doch herausfallenden Konstanten, für die einzelnen Terme folgende Werte

$$(1-\mu^2)\cdot P''^{m}_{\varkappa}(\mu) = (1-\mu^2)\Big[l\cdot(l-1)\cdot\mu^{l-2} + a\cdot(l-1)\cdot(l-2)\mu^{l-3} + b\cdot(l-2)\cdot(l-3)\cdot\mu^{l-4} + \ldots\ldots\Big]$$

$$-2\mu(\varkappa+1)\cdot P'^{m}_{\varkappa}(\mu) = -2\mu(\varkappa+1)\cdot\Big[l\cdot\mu^{l-1} + a\cdot(l-1)\cdot\mu^{l-2} + b\cdot(l-2)\cdot\mu^{l-3} + \ldots\ldots\Big]$$

$$+\big[n(n+1)-\varkappa(\varkappa+1)\big]P^m_\varkappa(\mu) = +\big[n(n+1)-\varkappa(\varkappa+1)\big]\cdot\Big[\mu^l + a\cdot\mu^{l-1} + b\cdot\mu^{l-2} + \ldots\ldots\Big]$$

Ich erhalte also folgende Gleichung:

$$\mu^l\Big[-l(l-1) - 2l(\varkappa+1) + \big(n(n+1)-\varkappa(\varkappa+1)\big)\Big]$$
$$+\mu^{l-1}\Big[-(l-1)(l-2) - 2(\varkappa+1)(l-1) + n(n+1) - \varkappa(\varkappa+1)\Big]a$$
$$+\mu^{l-2}\Big[b\big(-(l-2)(l-3) - 2(\varkappa+1)(l-2) + n(n+1) - \varkappa(\varkappa+1)\big) + l(l-1)\Big]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \equiv 0$$

Da diese Gleichung identisch gleich Null sein muß, so müssen sämtliche Koeffizienten gleich Null sein.

Wir finden so zur Berechnung von $l, a, b,$ u.s.w. die folgenden Gleichungen:

1.) $$-l^2 + l - 2l(\varkappa+1) = -\left(n(n+1) - \varkappa(\varkappa+1)\right)$$

$$l^2 + l(2\varkappa+1) = n(n+1) - \varkappa(\varkappa+1)$$

$$l_1 = n - \varkappa \qquad \left[l_2 = -(\varkappa+n+1)\right]$$

Da l eine ganze positive Zahl sein soll, so erhalten wir den Grad l des gesuchten Polynoms

$$\underline{l = n - \varkappa}$$

2.) Aus der Gleichung

$$0 = \left[n(n-1) - \varkappa(\varkappa+1) - (l-1)(l-2) - 2(\varkappa+1)(l-1)\right]\cdot a$$

folgt $$a = 0.$$

3.) $$b = \frac{l\cdot(l-1)}{(l-2)(l-3) + 2(\varkappa+1)(l-2) - n(n+1) + \varkappa(\varkappa+1)}$$

$$b = -\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa-1)}{2(2n-1)}$$

u.s.w.

Wir finden also für die Funktion $P_\varkappa^n(\mu)$ folgende endliche Reihe

$$P_\varkappa^n(\mu) = \mathfrak{C}\left[\mu^{n-\varkappa} - \frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa-1)}{2(2n-1)}\cdot\mu^{n-\varkappa-2} + \frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa-1)(n-\varkappa-2)(n-\varkappa-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cdot\mu^{n-\varkappa-4} - + \cdots\right]$$

Um die multiplikative Konstante zu bestimmen, fixiert man sie so, daß die Kugelfunktion am Nordpol gleich 1 ist. Dann ist $\cos\vartheta = \mu = 0$ und es bestimmt sich so

$$\mathfrak{C} = \frac{(2n)!}{(n-\varkappa)!\ 2^n.\ n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n-\varkappa)!\cdot 2^n\ n!},$$

so daß die Funktion heißt

$$P_\varkappa^n(\mu) = \frac{(2n)!}{(n-\varkappa)!\,2^n\,n!}\left[\mu^{n-\varkappa} - \frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa-1)}{2\cdot(2n-1)}\cdot\mu^{n-\varkappa-2} + \frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa-1)(n-\varkappa-2)(n-\varkappa-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}\cdot\mu^{n-\varkappa-4} - + \cdots\right]$$

Diese Funktion $P^n_\kappa(\mu)$ bezeichnet man, ~~wenn~~ wenn sie mit $(1-\mu^2)^{\frac{\kappa}{2}}$ d.h. mit $\sin^\kappa\vartheta$ multipliziert ist, als das ~~der~~ Laplace-sche Polynom oder die „zugeordnete Kugelfunktion."

Für den Fall $\kappa = 0$ bezeichnet man diese Funktion $P^n(\mu)$ als „einfache Kugelfunktion" oder Legendre-sches Polynom.

Ein solches Legendre-sches Polynom ist also durch folgende endliche Reihe darstellbar.

$$P^n(\mu) = \frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-3)(2n-1)}{n!}\left[\mu^n - \frac{n.(n-1)}{2.(2n-1)}\cdot\mu^{n-2} + \frac{n.(n-1)(n-2).(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cdot\mu^{n-4} - \cdots + \cdots\right]$$

In Bezug auf dieses Legendre-sche Polynom stellen wir nun folgende Behauptung auf:

Theorem:

Die Gleichung $P^n(\mu) = 0$ gibt nicht nur lauter reelle Wurzeln, ~~die~~ sondern auch lauter reelle Wurzeln, die zwischen (-1) und $(+1)$ liegen (und natürlich auch symmetrisch.)

Beweis:

Zum Beweise bedürfen wir des folgenden Hülfssatzes:

Hülfssatz:

Es besteht die Relation

$$P^n(\mu) = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{n!}\left[\mu^n - \frac{n.(n-1)}{2(2n-1)}\cdot\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\,\mu^{n-4} - \cdots + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{d^n[(\mu^2-1)^n]}{d\mu^n}$$

Beweis des Hülfssatzes:

Wir potenzieren $(\mu^2-1)^n$ nach dem binomischen Satze aus,

$$(\mu^2-1)^n = \mu^{2n} - n.\mu^{2n-2} + \frac{n.n-1}{1.2}\,\mu^{2n-4} - \cdots + \cdots\cdots,$$

und differenzieren die entstehenden Potenzreihe gliedweise n mal nach μ, so daß sich ergiebt

$$\frac{d^n(\mu^2-1)^n}{d\mu^n} = 2n.(2n-1)\ldots(n+1)\left[\mu^n - \frac{n.n.(n-1)}{2n.(2n-1)}\,\mu^{n-2} + \frac{n.(n-1).n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\,\mu^{n-4} - \cdots\right.$$

$$= \frac{2n!}{n!}\cdot\left[\mu^n - \frac{n.(n-1)}{2.(2n-1)}\cdot\mu^{n-2} + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\cdot\mu^{n-4} - \cdots + \cdots\right]$$

Also ist

$$\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(1-\mu^2)^n}{d\mu^n} = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{n!} \cdot \left[\mu^n - \frac{n.(n-1)}{2.(2n-1)} \cdot \mu^{n-2} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} \cdot \mu^{n-4} - + \ldots\right.$$

$$= \mathfrak{P}^n(\mu)$$

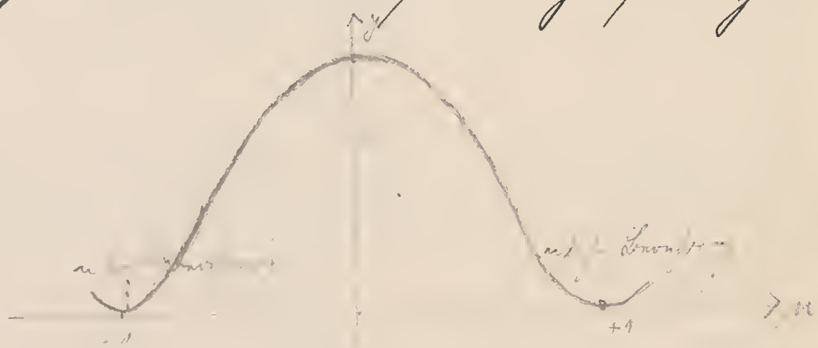
w. z. b. w.

An dem Beweis dieses Satzes können wir nun folgende Ergebnisse herausziehen:

die Gleichung

$$y = \cancel{+1}(\mu^2-1)^n = f_{2n}(\mu) = 0$$

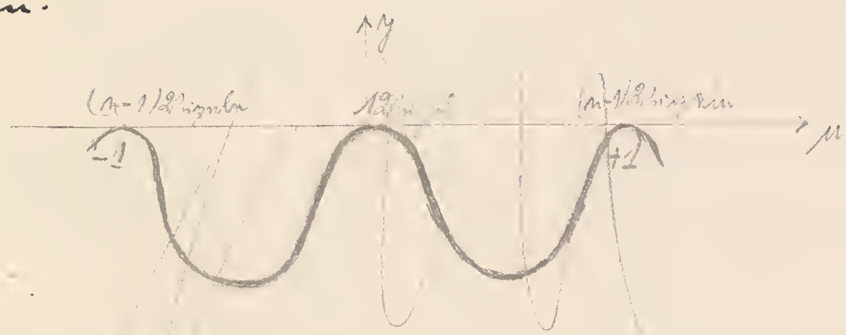
besitzt $2n$ reelle Wurzeln, von denen n bei $\mu = -1$, n bei $\mu = +1$ liegen. Die Kurve $y = (\mu^2-1)^n$ berührt die μ-Achse an den Stellen $\mu = -1$ bezw. $\mu = +1$ je n-fach.



Die Gleichung

$$y = \frac{d(\mu^2-1)^n}{d\mu} = f(2n-1) = 0$$

besitzt an den Stellen $\mu=+1$ und $\mu=-1$ je eine (n-fache Wurzel. Nach dem Rolle'schen Satz liegt dann zwischen $\mu=+1$ und $\mu=-1$ im Intervalle noch mindestens eine reelle Wurzel. Es kann aber auch nur noch eine Wurzel im Intervalle liegen, da der ganze Ausdruck also vom $(2n-1)$. Grade nur $(2n-1)$ Wurzeln haben kann.



Durch Fortsetzen derselben Schlussweise erkennen wir, dass $y=\frac{d^2(\mu^2-1)^n}{d\mu^2}=0$ an den Grenzen +1 und -1 noch je $(n-2)$ Wurzeln besitzt und überdies noch 2 mal im Intervalle verschwindet. Weiterhin können wir also schliessen, dass die Gleichung

$$y=\frac{d^n(\mu^2-1)^n}{d\mu^n}$$

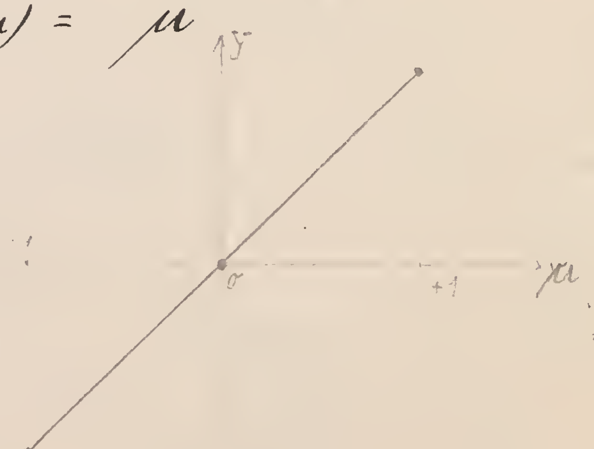
an den Grenzen (+1) und (-1) zwar nicht verschwindet,

aber im Intervalle n reelle Wurzeln besitzt.

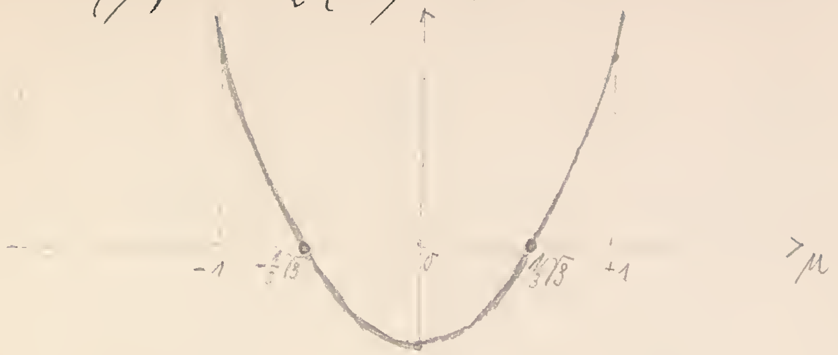
Da nun $P^n(\mu)$ von dem Differentialquotienten $\frac{d^n(\mu^2-1)^n}{d\mu^n}$ nur um einen Zahlenfaktor verschieden ist, so verschwindet es ebenfalls für die Grenzen des Intervalls $\mu = +1$ und $\mu = -1$ gar nicht, aber im Intervalle n mal null, w. z. b. w.

Wir wollen uns jetzt nun kurz die Gleichungen der ~~Kurven~~ Legendre-schen Polynome für die Werte $n = 1, 2, 3, 4$ hinschreiben und die zugehörigen Kurven zeichnen.

1.) $P^1(\mu) = \mu$

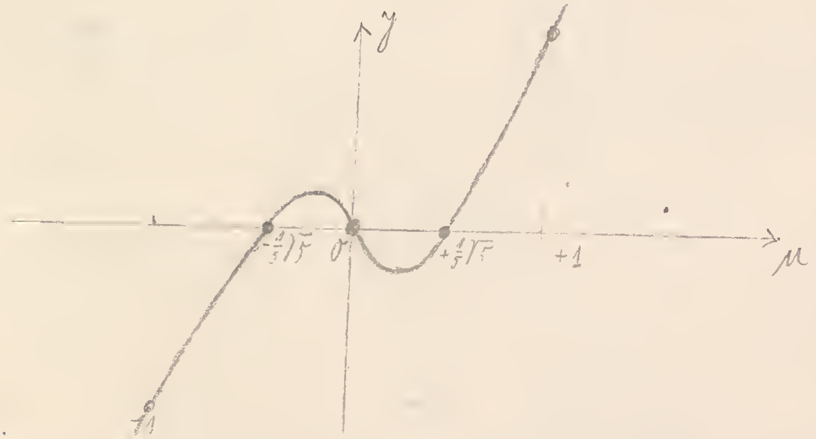


2.) $P^2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$



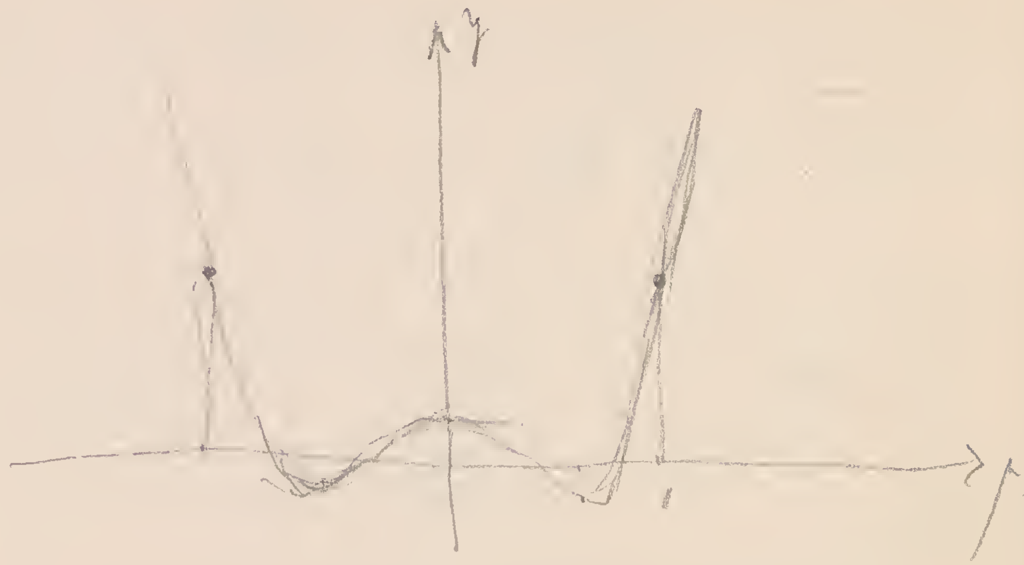
Die Kurve dieser Gleichung ist eine gemeine Parabel, welche die X Achse in den Nullen $\mu \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$ kreuzt.

3.) $P^3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$



Diese Kurve schneidet die X Achse in den Punkten $\mu = 0, = -\frac{1}{5}\sqrt{5}, = +\frac{1}{5}\sqrt{5}$

4.) $P^4(\mu) = \frac{1}{8}\left(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3\right)$



Über diese Kurven vergl. Byerly, Fouriers series and spherical harmonics: pg 185.

Die aufeinander folgenden $P^n(\mu)$ sind also ganz bestimmte Polynome mit numerischen Koeffizienten. Die geraden $P^n(\mu)$ enthalten nur die geraden Potenzen ~~der~~ μ, während die ungeraden $P^n(\mu)$ nur die ungeraden Potenzen der μ enthalten, so dass man hier μ als Faktor herausziehen kann.

Die einzelnen Glieder eines jeden Polynoms

haben alternierende Vorzeichen; für $\mu = 1$ hat jedes $P^n(\mu)$ selbst den Wert 1.

Um nun unser letztes Theorem, dass die einfache Kugelfunktion $P^n(\mu)$ im Intervalle von -1 bis $+1$ n reelle Wurzeln hat, ~~bedürfen~~ auch auf die zugeordneten Kugelfunktionen auszudehnen, bedürfen wir des folgenden Hülfssatzes.

Satz:

Unser $P^n_\kappa(\mu)$ ist bis auf einen konstanten Faktor, der vorläufig nicht in Betracht kommt, gleich dem κ ten Differentialquotienten des $P^n(\mu)$ nach μ.

$$P^n_\kappa(\mu) = \frac{d^\kappa P^n(\mu)}{d\mu^\kappa}$$

Beweis:

Die Funktion $P^n(\mu)$ genügt der Differentialgleichung

$$(1-\mu^2)\, P^n(\mu)'' - 2\mu\, P^{n\prime}(\mu) + n(n+1) \cdot P^n(\mu) = 0.$$

(cfr. pag. 236)

Wenn wir diese Gleichung κ mal nach μ differenziren, so ergiebt sich

$$(1-\mu^2)\cdot P_{n\,(\mu)}^{(\kappa+2)} \cancel{+} - 2\mu\, P_{n\,(\mu)}^{(\kappa+1)} + n(n-1)\, P_{n\,(\mu)}^{\kappa}$$
$$-2\mu(\kappa+1)\, P_{n\,(\mu)}^{(\kappa+1)} - \kappa(\kappa+1)\, P_n^{\kappa}(\mu) = 0$$

oder

$$(1-\mu^2)\, P_{n\,(\mu)}^{(\kappa+2)} - 2\mu(\kappa+1)\, P_{n\,(\mu)}^{(\kappa+1)} + \left[n(n-1)-\kappa(\kappa+1)\right] P_{n\,(\mu)}^{\kappa} = 0.$$

Der κte Differentialquotient von $P^n(\mu)$ genügt also dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die zugeordnete Kugelfunktion $P^n_\kappa(\mu)$ genügt aber einer ebensolchen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-\mu^2)\, P''^{n}_{\kappa}(\mu) - 2\mu(\kappa+1)\cdot P'^{n}_{\kappa}(\mu) + \left[n(n-1)-\kappa(\kappa+1)\right]\cdot P^n_\kappa(\mu) = 0.$$

Verstehe ich also unter $P^n(\mu)$ irgend eine Lösung der Differentialgleichung der gewöhnlichen Kugelfunktion, dann ist der κte Differentialquotient dieser gewöhnlichen Kugelfunktion $P^n(\mu)$ eine zugeordnete Kugelfunktion $P^n_\kappa(\mu)$.

Da nun $P_\varkappa^n(\mu)$ ein Polynom sein soll, welches unserer letzten Differentialgleichung befriedigt, da ferner $P^n(\mu)$ ein Polynom ist welches die erste Differentialgleichung befriedigt und ein Polynom beim Differenzieren immer wieder ein Polynom giebt, so wird auch der $\varkappa$te Differentialquotient wieder ein Polynom geben und somit den speziell gesuchten Wert der zugeordneten Kugelfunktion $P_\varkappa^n(\mu)$.

Nachdem wir diesen Satz bewiesen haben, können wir das folgende Theorem aufstellen.

Theorem:

Die Funktion $P_\varkappa^n(\mu)$ hat im Intervalle von (-1) bis $(+1)$ $(n-\varkappa)$ getrennte reelle Wurzeln.

Beweis:

Da die Gleichung

$$P^n(\mu)=0$$

im Intervalle von (-1) bis $(+1)$ n reelle,

getrennte Wurzeln hat, so folgt aus dem Rolle'schen Satze, dass der κ te Differentialquotient

$$\frac{d^\kappa P^n(\mu)}{d\mu^\kappa} = 0$$

mindestens $n - \kappa$ reelle Wurzeln im selben Intervalle hat.

Da die Gleichung

$$P^n_\kappa(\mu) = \frac{d^\kappa P^n(\mu)}{d\mu^\kappa} = 0$$

aber nur vom $(n-\kappa)$ ten Grade ist, so kann sie auch nur $(n-\kappa)$ Wurzeln haben.

Die zugeordnete Kugelfunktion $P^n_\kappa(\mu)$ hat also im Intervalle von (-1) bis $(+1)$ $(n-\kappa)$ reelle, getrennte Wurzeln, w. z. b. w.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen wollen wir zurückgehen zu der ~~Integr~~ Gleichung des Potentials

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

von der wir eine Lösung gefunden hatten in der Form

$$u = r^n \cdot e^{i\kappa\omega} \cdot \sin^\kappa\vartheta \cdot P^n_\kappa(\cos\vartheta),$$

die wir geometrisch interpretieren wollen.

Auf der Kugel vom Radius r wollen wir uns die Nullstellen des Potentials zeichnen.

Es sind offenbar folgende Fälle möglich:

1.) Es ist $\kappa = 0$.

Dann ~~ist~~ gilt die Gleichung

$$P^n(\cos\vartheta) = 0,$$

die n reelle getrennte Wurzeln hat.

Wir bekommen auf der Kugel also n reelle Parallelkreise, die die Kugel in Zonen einteilen.

Man spricht von zonalen Kugelfunktionen. (Dieser und die beiden folgenden Bezeichnungen sind von den ~~beiden~~ englischen Mathematikern eingeführt.)

2.) Es ist $0 < \kappa < n$.

Wir bekommen dann die Relation

$$e^{i\kappa w} \cdot \sin^\kappa\vartheta \cdot P^n_\kappa(\cos\vartheta) = 0.$$

Der Faktor

a) $e^{i\kappa w} = 0,$

von denen ich entweder den ~~reellen oder den~~ Bestandtheil $\cos\kappa\omega$ oder den Bestandtheil $\sin\kappa\omega$ benützen muss, liefert κ Meridiane, die sich in den Polen ~~[illegible]~~ unter gleichen Winkeln kreuzen.

der Factor

$$b)\ P_{\kappa}^{n}(\cos\vartheta) = 0$$

hat $(n-\kappa)$ reelle getrennte Wurzeln, ~~die~~ er liefert also auf der Kugel $(n-\kappa)$ Parallelkreise.

der Factor

$$c)\ \sin^{\kappa}\vartheta = 0$$

liefert die Pole, also nichts neues.
Man bezeichnet diese Functionen als tesserale Kugelfunctionen, da die Kugel in Vierecke zerlegt wird.

3.) Es ist $\kappa = n$.

In diesem Falle ist die Function

$$P_{n}^{n}(\cos\vartheta)$$

eine Constante. Wir bekommen also für die Nullstellen die Gleichung

$$e^{i\kappa\omega} = 0,$$

werden wir entweder den Bestandtheil $\cos\kappa\omega$,

oder den Bestandteil $\sin k w$ benutzen müssen.
Die Relation liefert n Meridiane, die sich in den Polen unter gleichen Winkeln kreuzen.

Man bezeichnet eine solche Funktion als „spezielle Kugelfunktion“.

Die Beziehung zu den Besselschen Funktionen lässt sich etwa folgendermaßen einsehen: Ebenso wie die Horizontalebene in unserer Theorie der Besselschen Funktionen in Gebiete zerlegt erscheint durch konzentrische Kreise und Meridiane, so wird hier in der Theorie der Kugelfunktionen die Kugel durch Parallelkreise und Meridiane in Gebiete zerlegt.
Die Einteilung des Planums, welche sich in der Theorie der Besselschen Funktionen ergab, ist offenbar ein Grenzfall zu der allgemeinen Einteilung der Kugel.
Diese Tatsache stimmt damit überein, dass man die Cylinderkoordinaten als Grenzfall der räumlichen Polarkoordinaten auffassen kann

Wir wollen uns jetzt noch für den Fall $n = 5$ die Nulllinien des Potentials auf der Kugel vom Radius r wirklich zeichnen. Es sind offenbar 6 verschiedenen Fälle möglich, da $\varkappa$ von 0 bis 5 läuft.

Die Gleichung der Nulllinien des Potentials ist

$$u = P_{\varkappa}^{n}(\cos\vartheta) \cdot \sin^{\varkappa}\vartheta \cdot \begin{Bmatrix} \cos\varkappa\omega \\ \sin\varkappa\omega \end{Bmatrix} = 0$$

1.) $\varkappa = 0$

In diesem Falle ist

$$P_{0}^{5}(\cos\vartheta) = \frac{1}{8}\left[63\cos^{5}\vartheta - 70\cdot\cos^{3}\vartheta + 15\cdot\cos\vartheta\right] = 0$$

die Gleichung der Knotenlinien, wir bekommen auf der Kugel 5 volle Parallelkreise.

Wir haben die zonalen Kugelschnittlinien.

2.) $\kappa = 1.$

Aus der Relation

$$P_n^{\kappa}(\mu) = \frac{d^{\kappa} P^{n}(\mu)}{d\mu^{\kappa}}$$

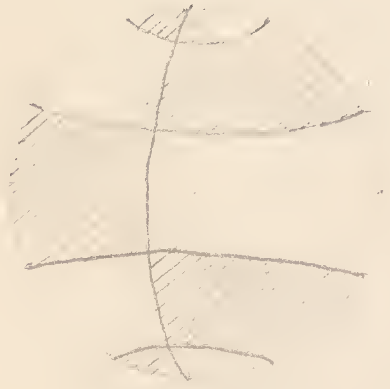
folgt

$$P_1^{5}(\mu) = \frac{15}{8}\left[21\mu^4 - 14\mu^2 + 1\right],$$

und für die Nulllinien haben wir die Gleichung

$$\cancel{\mu} = \frac{15}{8}\left[21\cdot\cos^4\vartheta - 14\cdot\cos^2\vartheta + 1\right]\cdot\sin\vartheta\cdot\begin{cases}\cos\omega\\ \sin\omega\end{cases} = 0.$$

Wir erhalten 4 Parallelkreise und einen Meridian



3.) $\kappa = 2$

Für $\kappa = 2$ lautet die Gleichung der Nulllinien

$$u = \sin^2\vartheta \cdot P_2^5(\cos\vartheta) \cdot \begin{cases}\cos 2\omega \\ \sin 2\omega\end{cases} = 0,$$

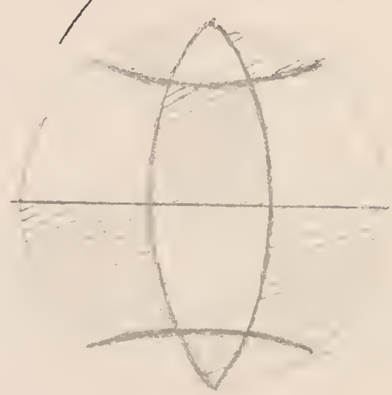
worin sich durch Differentiation von $P_1^5(\cos\vartheta)$ nach $\cos\vartheta$

$$P_2^5(\cos\vartheta) = \frac{105}{2}(3\mu^3 - \mu)$$

ergiebt, so daß wir haben,

$$u = \sin^2\vartheta \cdot \frac{105}{2}(3\cos^3\vartheta - \cos\vartheta) \cdot \begin{cases}\cos 2\omega \\ \sin 2\omega\end{cases} = 0,$$

eine Gleichung die 3 Parallelkreise und 2 Meridiane liefert



4./ $\kappa = 3$

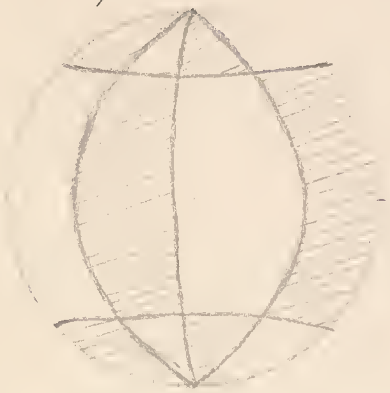
Es ist

$$P_3^5(\mu) = \frac{105}{2}(9\mu^2 - 1),$$

so daß die Gleichung der Nulllinien lautet

$$u = \frac{105}{2}(9\cos^2\vartheta - 1) \cdot \sin^3\vartheta \cdot \begin{cases}\cos 3\omega \\ \sin 3\omega\end{cases} = 0$$

die auf unserer Kugel 2 Parallelkreise und 3 Meridiane liefert

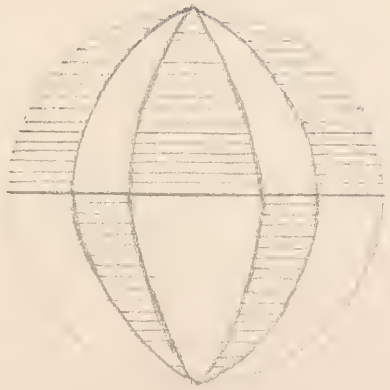


5) $\varkappa = 4$

Hier heißt die Gleichung der Nulllinien

$$u = 945 \cos\vartheta \cdot \sin^4\vartheta \begin{cases}\cos 4\omega \\ \sin 4\omega\end{cases} = 0,$$

so daß wir ~~wohl~~ 1 Parallelkreis und 4 Meridiane erhalten.



Im Fall 2–5 haben wir tesserale Kugelfunktionen.

6) $n = 5$

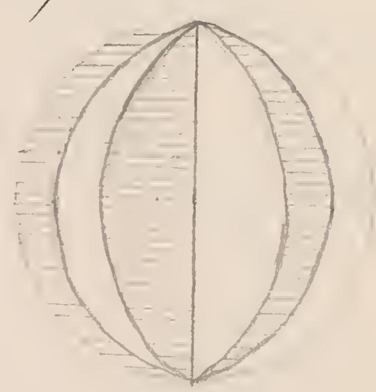
Da

$$P_5^5(\cos\vartheta) = 945$$

ist, so liefert die Gleichung für die Nulllinien

$$u = 945 \cdot \sin^5\vartheta \begin{cases} \cos 5\omega \\ \sin 5\omega \end{cases} = 0$$

überhaupt keinen Parallelkreis mehr, sondern 5 Meridiane. Wir haben den Fall der sektoriellen Kugelfunktionen



Wir wollen noch zum Schluss einige Anwendungen der Kugelfunktionen kennen lernen.

Vorweg wollen wir die Bemerkung festhalten, dass uns für jedes ganzzahlige n, $(2n+1)$ Funkt-

tionen auf der Kugel bekannt sind, nämlich erstens die gewöhnlichen Kugelfunktionen $P^n(x)$, wo n von 1 bis n läuft, und zweitens die zugeordneten Kugelfunktionen, wo $\varkappa$ von 0 bis n läuft.

Machen wir nun den Übergang von der Kugel zum Kreise.

War uns auf dem Kreise eine Funktion $f(\omega)$ gegeben, [die sich im Intervalle 2π jedesmal reproduziert], so konnten wir diese Funktion durch eine trigonometrische Reihe darstellen.
[Vgl. für das folgende: Klein: Differential- und Integralrechnung II. pg. 166–253]

Wir konnten die Funktion für Zwecke des praktischen Rechnens mit Bessel approximieren durch folgende endliche Reihe

$$f(\omega) \sim \sum_0^N a_\varkappa \cos \varkappa\omega + \sum_0^N b_\varkappa \cdot \sin \varkappa\omega,$$

für die rein theoretische Betrachtung konnten

wie dieselbe Funktion genau darstellen mit Fourier durch folgende unendliche Reihe

$$f(\omega) = \sum_0^\infty a_\kappa \cos \kappa\omega + \sum_0^\infty b_\kappa \sin \kappa\omega.$$

Es soll jetzt eine Funktion $f(\omega, \vartheta)$ auf der Kugel gegeben sein; man wünscht diese Funktion darzustellen durch eine trigonometrische Reihe, sei es approximativ mit Bessel, sei es genau mit Fourier. Dann gilt der folgende Ansatz

$$f(\omega\, \vartheta) \backsim \sum_0^N \sum_0^n \left(A_\kappa^n \cos \kappa\omega + B_\kappa^n \sin \kappa\omega\right) . P_\kappa^n(\cos\vartheta) . \sin^\kappa \vartheta$$

die Anzahl der Koeffizienten ist hier

$$1 + 3 + 5 + \ldots \ldots + (2N+1),$$

die gleiche Anzahl von Konstanten haben wir naturgemäß.

Die genaue Darstellung der Funktion würde lauten

$$f(\omega, \vartheta) = \sum_0^\infty \sum_0^n \left(A_\kappa^n \cos \kappa\omega + B_\kappa^n \sin \kappa\omega\right) . P_\kappa^n(\cos\vartheta) . \sin^\kappa \vartheta.$$

[Diese Ansätze können wegen der Kürze der Zeit hier nicht bewiesen, sondern nur wahrscheinlich

mitgeteilt werden.]

Der Nutzen ist also vor allen Dingen der, daß sie sehr geeignet sind, irgend welche Funktionen $f(\vartheta)$ in einer für die Rechnung bequemen Form darzustellen, sei es approximativ, sei es genau.

Diese letztgenannten Ansätze werden zuerst gemacht von Laplace in der „Mécanique céleste", bei Gelegenheit der Behandlung von Ebbe und Flut.

Gauss in der „Theorie des Erdmagnetismus" braucht einen ähnlichen Ansatz zur Darstellung des magnetischen Potentials der Erde u.

Er braucht zur Darstellung des magnetischen Potentials über die Erde hin, die eine Funktion der Poldistanz ϑ und der Länge ω ist [$u = f(\vartheta, \omega)$], eine Kugelfunktionenentwicklung, die bis zu den Gliedern ~~vierter~~ Ordnung geht und also

$$1+3+5+7+9 = 25$$

numerische Konstanten enthält, die man so bestimmt, daß den Beobachtungen möglichst genau entsprochen wird. Er setzt also

$$u = f(\omega, \vartheta) = \sum_{0}^{4} \sum_{0}^{n} \left(A_\kappa^n \cos \kappa\omega + B_\kappa^n \sin \kappa\omega \right) \cdot P_\kappa^n(\cos\vartheta) \cdot \sin^\kappa \vartheta$$

oder

$$\begin{aligned} u = f(\omega, \vartheta) = & \sum_{0}^{4} A_0^n \, P^n(\cos\vartheta) \\ & + \cos\omega \cdot \sin\vartheta \cdot \sum_{1}^{4} A_1^n \cdot P_1^n(\cos\vartheta) \\ & + \sin\omega \, \sin\vartheta \sum_{1}^{4} B_1^n \cdot P_1^n(\cos\vartheta) \\ & + \cos 2\omega \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sum_{2}^{4} A_2^n \cdot P_2^n(\cos\vartheta) \\ & + \sin 2\omega \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sum_{2}^{4} B_2^n \cdot P_2^n(\cos\vartheta) \\ & + \cos 3\omega \cdot \sin^3\vartheta \cdot \sum_{3}^{4} A_3^n \cdot P_3^n(\cos\vartheta) \\ & + \sin 3\omega \cdot \sin^3\vartheta \cdot \sum_{3}^{4} B_3^n \cdot P_3^n(\cos\vartheta) \\ & + \cos 4\omega \cdot \sin^4\vartheta \cdot A_4^4 \cdot P_4^4(\cos\vartheta) \\ & + \sin 4\omega \cdot \sin^4\vartheta \cdot B_4^4 \cdot P_4^4(\cos\vartheta). \end{aligned}$$

Die Größen $P_4^4(\cos\vartheta)$ sind Konstante, die wir mit den konstanten Koeffizienten A_4^4 bzw. B_4^4 zusammenziehen können.

Gauss führt in diesem letzten Ansatz nun folgende neuen ~~Grö~~ Quantitäten ein:

$$\sum_0^4 A_0^n \cdot P^n(\cos\vartheta) = \Pi_4(\cos\vartheta)$$

$$\sum_1^4 A_1^n \cdot P_1^n(\cos\vartheta) = \Pi_3(\cos\vartheta)$$

$$\sum_1^4 B_1^n \cdot P_1^n(\cos\vartheta) = \Pi_3'(\cos\vartheta)$$

u. s. w.

Es hat so

$$\begin{aligned} u = f(\omega,\vartheta) = {} & \Pi_4(\cos\vartheta) \\ & + \cos\omega \cdot \sin\vartheta \cdot \Pi_3(\cos\vartheta) \\ & + \sin\omega \cdot \sin\vartheta \cdot \Pi_3'(\cos\vartheta) \\ & + \cos 2\omega \cdot \sin^2\vartheta \cdot \Pi_2(\cos\vartheta) \\ & + \sin 2\omega \cdot \sin^2\vartheta \cdot \Pi_2'(\cos\vartheta) \\ & + \cos 3\omega \cdot \sin^3\vartheta \cdot \Pi_1(\cos\vartheta) \\ & + \sin 3\omega \cdot \sin^3\vartheta \cdot \Pi_1'(\cos\vartheta) \\ & + \cos 4\omega \cdot \sin^4\vartheta \cdot A_4^4 \\ & + \sin 4\omega \cdot \sin^4\vartheta \cdot B_4^4 \end{aligned}$$

In dieser Form giebt Gauss seine bezügliche Entwicklung des Potentials des Erdmagnetismus. Sie findet sich in den gesammelten Werken Bd. IV, S. 151.

Die Polynome Π enthalten zusammen genommen gerade 25 Koeffizienten, welche Gauss numerisch angiebt.

Im übrigen sind seine Benennungen wesentlich anders als die unsrigen, er hat

anstatt u — λ
anstatt $\sin d$ — f
anstatt $\cos d$ — e gesetzt.

Der Ansatz heißt also in den Gaussschen Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
u = \; & \Pi_4(e) + \cos\lambda \cdot f \cdot \Pi_3(e) + \sin\lambda \cdot f \cdot \Pi_3'(e) \\
& + \cos 2\lambda \cdot f^2\, \Pi_2(e) + \sin 2\lambda \cdot f^2 \cdot \Pi_2'(e) \\
& + \cos 3\lambda \cdot f^3 \cdot \Pi_1(e) + \sin 3\lambda \cdot f^3 \cdot \Pi_3'(e) \\
& + \cos 4\lambda \cdot f^4 \cdot C \quad + \sin 4\lambda\, f^4 \cdot C_1
\end{aligned}
$$

Die nähere Theorie dieser Kugelfunktionenreihen ist genau analog der trigonometrischen Reihen, die sich an die Namen Fourier und Bessel anknüpfen.

Eine Aufgabe, die in der Potentialtheorie eine wichtige Rolle spielt, ist die sog. „Randwertaufgabe."

Es ~~ist~~ sind für eine Funktion

$$u(x, y, z)$$

~~gegeben~~, die Werte ~~auf der~~ Oberfläche eines Raumstücks fest vorgegeben ~~der Laplace-schen Gleichung genügt~~. Es soll nun eine Funktion so bestimmt werden, daß sie im Innern des Raumstücks durchaus stetig verläuft und der Laplace-schen Gleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Ist auf der Kugel vom Radius a der Randwert des Potentials gegeben:

$$u = f(w, \vartheta) = \sum_0^\infty \sum_0^n \left(A_\kappa^n \cos \kappa w + B_\kappa^n \sin \kappa w\right) \cdot \sin^\kappa \vartheta \cdot P_\kappa^n(\cos \vartheta),$$

dann erhalte ich sofort das Potential eines jeden Punktes im Innern wenn ich diese Gleichung multipliziere mit $\left\{\frac{r^n}{a^n}\right\}$, so

daß ich nunmehr die Gleichung des Potentials erhalte in folgendem Ansatze

$$u = f(\vartheta, \omega) = \left\{\frac{r^n}{a^n}\right\} \cdot \sum_0^n \sum_0^n \left(A_\kappa^n \cdot \cos \kappa\omega + B_\kappa^n \sin \kappa\omega\right) \cdot \sin^\kappa \vartheta \cdot P_\kappa^n(\cos\vartheta)$$

Wir kommen nunmehr zu dem letzten großen Abschnitte, den wir überschreiben wollen

Partielle Differentialgleichungen.

Wir wollen hauptsächlich die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik betrachten, die in den verschiedensten Gebieten auftreten.

Da wollen wir zunächst nebeneinander die folgenden 3 Gruppen von partiellen Differentialgleichungen studieren.

1.) die Gleichungen des Potentials

$$\Delta u = 0.$$

Beschränken wir uns auf eine Gerade, so haben wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Das Potential einer Ebene wird dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

das eines Raumstücks endlich durch die bereits mehrmals betrachtete Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2.) Die Schwingungsgleichungen.

Für die Schwingungen einer Saite oder Luftsäule haben wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

für die einer Membran die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

endlich für die Schwingungen eines Luftraums die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

genau dieselben Gleichungen gelten natürlich für die Schwingungen, die in der Theorie des Lichtes und der Elektrizität auftreten. Wir haben hier die Bezeichnungen der Akustik gewählt, weil sie am anschaulichsten sind.

3.) die Wärmeleitungsgleichung.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Alle diese Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und ohne gemischtes Glied.

In der theoretischen Physik betrachtet man oft viel kompliziertere Gleichungen. Wir haben die Gleichungen so angesetzt, dass sie möglichst einfach werden. Bei der Schwingungs- und Wärmeleitungs-gleichung ist z. B. vorausgesetzt, dass ein homogenes, isotropes Medium vorliegt, außerdem haben wir die Maßeinheiten passend so gewählt, dass alle Glieder den Koeffizienten $+1$ oder -1 haben

Behandeln wir zunächst die partielle Differentialgleichung der Saitenschwingung,

diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

hat von der Mitte des 18.ten Jahrhunderts an von den Mathematikern [Euler, d'Alembert und Daniel Bernoulli] eine besonders ausführliche Behandlung erfahren.

[Eine ~~geeignete Zusammenstellung findet sich~~ ausführliches Referat hat Burkhardt in den Berichten der deutschen Mathematikervereinigung Bd. X.)]

Wir wollen zur Integration dieser Gleichung zunächst eine Methode verwenden, die schon von d'Alembert angegeben ist.

Methode von d'Alembert.

Man sieht sofort, dass

$$u = f(x+t) =: f(v)$$

eine partikuläre Lösung dieser Gleichung

ist. In der That, bildet man die partiellen Differentialquotienten, so findet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Es ist also wirklich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Man sieht aber ebenso unmittelbar, daß auch

$$u = f(x-t) = f(v)$$

eine particuläre Lösung unserer Gleichung ist, denn wenn wir wieder die Differentialquotienten bilden, (.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

so ist wirklich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Da wir über die jedesmalige Funktion f gar nichts voraus gesetzt haben, so ~~haben~~ können wir die beiden particulären Lösungen

$$u_1 = \varphi(x+t)$$
$$u_2 = \psi(x-t)$$

ansehen, sodass wir als allgemeinere Lösung haben

$$u = \varphi(x+t) + \psi(x+t).$$

Wir behaupten nun, dass dies die allgemeinste Lösung unserer Gleichung ist.

Fragen wir zunächst nach der mechanischen Bedeutung dieser Funktionen $\varphi(x+t)$ und $\psi(x-t)$. Denn eine unendlich reichende Saite, die mit der X Achse zusammenfällt, sei zur Zeit $t=0$ längs eines im Endlichen gelegenen Stückes deformiert.

Wenn wir die particuläre Lösung $u_1 = \varphi(x+t)$ betrachten, so ist diese Deformation gegeben durch die Gleichung $u = \varphi(x)$.

Die Gleichung

$$u_1 = \varphi(x+t)$$

besagt dann, daß diese Deformation in unveränderter Gestalt an der Saite nach links hin entlang wandert.

Denn jede Ordinate $\varphi(x_1)$ ist nach Verlauf der Zeit t an die Stelle $x_1 - t$ gelangt, und zwar in unveränderter Größe, denn es ist

$$\varphi(x_1 - t + t) = \varphi(x_1).$$

Die Geschwindigkeit dieses Fortschreitens ist offenbar gleich 1, da Weg und Zeit beide gleich t sind.

In entsprechender Weise bedeutet die Formel $u_2 = \psi(x-t)$, daß eine andere Welle ebenfalls von beliebiger aber unveränderlicher Gestalt mit der Geschwindigkeit 1 nach rechts hin verläuft.

Wir können nunmehr leicht angeben, was die allgemeine Lösung

$$u = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

mechanisch interpretiert bedeutet:

Die allgemeine Bewegung der schwingenden

Seite besteht darin, dass sich eine Ausbreitung von willkürlicher, aber unveränderter Gestalt, die mit konstanter Geschwindigkeit 1 von links nach rechts entlang der Seite fortschreitet, überlagert mit einer andern willkürlichen Ausbreitung, welche in ganz derselben Weise, wie von rechts nach links an der Seite entlang läuft.

Diese beiden willkürlichen Funktionen $\varphi(x+t)$ bezw. $\psi(x-t)$ werden durch die gegebenen Anfangsbedingungen des Problems festgelegt, wie wir es an einigen Beispielen betrachten wollen.

a.) Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Seite zu Anfang in einer deformierten Lage ruhig gehalten wird und dann bei $t=0$ plötzlich losgelassen wird.

Die Anfangsbedingungen lauten dann: für $t=0$ ist u gleich einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist überall gleich 0; also haben wir

$$(u)_{t=0} = \varphi(x) + \psi(x) = f(x),$$

und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi'(x) - \psi'(x) = 0$$

Aus der ersten dieser Differentialgleichungen folgt:

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x),$$

also mit Heranziehung der zweiten

$$\varphi'(x) = \psi'(x) = \frac{1}{2} f'(x)$$

eine Gleichung, die sofort integrabel ist:

$$\varphi(x) \cancel{= \psi(x)} = \frac{1}{2} f(x) + C.$$

bezw. $\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - C,$

da ja $\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$

sein müssen.

Bei der Bildung der allgemeinen Lösung fällt also die Konstante fort und wir erhalten

$$u = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t)$$

Die d'Alembertsche Lösung ist also in der Tat geeignet, auf unsere Fragestellung Auskunft zu geben, und zwar lautet diese Antwort, daß von der Stelle der ursprünglichen

Ausbreitung aus nach beiden Seiten hin zu eine Welle fortschreitet mit der Geschwindigkeit 1, deren Profil zur Zeit $t=0$ durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{2} f(x)$$

gegeben sein würde, die also von halber Höhe der ursprünglichen Ausbreitung ist.

b.) Eine zweite Frage der Mechanik ist das folgende Problem:

Zur Zeit $t=0$ ist die Saite nicht deformirt, (also $u=0$), in einem endlichen Intervall aber besitzen die einzelnen Teilchen eine vorgegebene Geschwindigkeit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$$

im Momente $t=0$ besitzen.

Aus den beiden Beziehungen

$$u = \varphi(x) + \psi(x) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi'(x) - \psi'(x) = g(x)$$

folgt
$$\varphi'(x) + \psi'(x) = 0$$
und also
$$\varphi'(x) = \cancel{\psi'(x)} = \frac{1}{2} g(x) \quad \text{bzw.} \quad \psi'(x) = -\frac{1}{2} g(x)$$
und durch Integration
$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(\xi) \cdot d\xi + C$$
bzw.
$$\psi(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x g(\xi) \cdot d\xi - C.$$

Die d'Alembert-sche Lösung führt also auch hier zum Ziele, wir erhalten
$$u = \frac{1}{2} \int_0^{x+t} g(\xi) \cdot d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{x-t} g(\xi) \cdot d\xi$$
oder
$$u = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) \cdot d\xi$$

Gerade wie vorhin erhalten wir ~~[illegible]~~ auch hier die Bewegung der Saite so, daß von der Stelle aus, wo zur Zeit $t = 0$ eine Geschwindigkeit vorhanden war, nach links hin eine Ausbiegung $u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{x+t} g(\xi) \cdot d\xi$

und symmetrisch nach rechts hin eine Ausbiegung $u_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{x-t} g(\xi)\cdot d\xi$ entlang der Saite fortschreitet.

Durch Superposition der Fälle a.) und b.) erhalten wir ohne weiteres die allgemeine Bewegung der Saite: Befindet sich die unendlich ausgedehnte Saite zur Zeit $t=0$ in einer deformierten Lage

$$(u)_{t=0} = f(x)$$

und die Geschwindigkeitsverteilung längs der Saite ist in demselben Momente durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x)$$

gegeben, dann bewegt sich die Saite im Verlaufe der Zeit t nach der Formel

$$u = \frac{1}{2}\, f(x+t) + \frac{1}{2}\, f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\, d\xi$$

Wir werden dementsprechend die beiden Fälle a.) und b.) als die beiden speziellen Typen der Bewegung anzusehen haben, denen wir unser Hauptinteresse zuzuwenden haben.

So einfach die Formeln aussehen, die wir für die Typen a.) und b.) erhalten haben, so steckt doch sehr viel interessantes darin; wir wollen einmal zwei besonders wichtige Spezialfälle diskutieren: nämlich der „gezupften" und der „angeschlagenen" Saite.

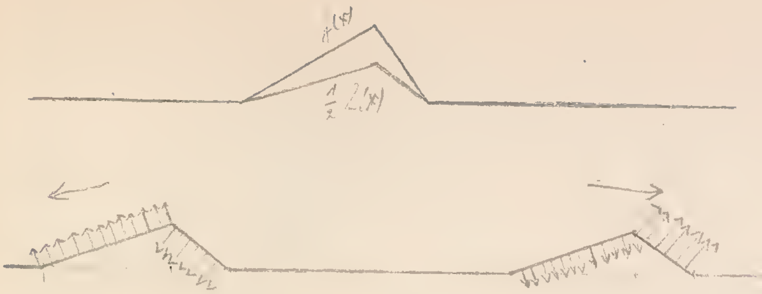
a. Fall der gezupften Saite:

Dieser Fall gehört unter den Typus a.).
Das zugehörige Experiment ist folgendermaßen auszuführen:

Wir ziehen die unendlich ausgedehnte Saite aus der Ruhelage heraus, halten aber dabei an irgend zwei anderen Stellen die Saite auf der X-Achse fest, um die Ausbiegung auf ein endliches Intervall zu beschränken.

Wir erhalten also einen gebrochenen Geradenzug, den wir als die Darstellung der Funktion $f(x)$ ansehen müssen.

Lassen wir jetzt die Saite im Zeitpunkte $t=0$ plötzlich los, so beginnt sie sich nach der For-



und

$$u = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t)$$

zu bewegen.

D. h. die Funktion $\frac{1}{2} f(x)$ wandert von der Ausbuchtungsstelle aus, einmal nach rechts, andererseits nach links mit der Geschwindigkeit 1.

Fragen wir nach der Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$, mit der sich die einzelnen Teile der Saite in vertikaler Richtung bewegen, so haben wir folgendes zu überlegen: Es ist

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = + \frac{\partial u_1}{\partial x} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = - \frac{\partial u_2}{\partial x} ,$$

bekanntlich ~~wie das~~ und entscheiden aber die Ausdrücke $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ durch ihr Vorzeichen über das An- oder Absteigen der Funktionen $u_1 = f(x)$ bzw. $u_2 = f(x)$

und durch ihren absoluten Betrag über die Stärke dieser Neigung gegen die Horizontale.

Infolgedessen gewinnen wir die Erkenntnis, daß alle Teilchen, die demselben geradlinigen Stück der Saite angehören, gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit besitzen, die um so größer ist, je steiler jenes geradlinige Stück gegen die X Achse steht. Zugleich liefern uns die Vorzeichen Aufschluß über die Richtung der Geschwindigkeit.

Die drei Knickpunkte, die an jeder Ausbuchtung auftreten, bilden offenbar drei Unstetigkeitsstellen für die Geschwindigkeit, indem die Teilchen der Saite über die gerade ein solcher Knickpunkt hinweggeht, eine plötzliche Änderung der Geschwindigkeit erleiden.

b. Fall der angeschlagenen Saite.

Die unendlich ausgedehnte Saite falle anfangs mit der X Achse zusammen. Zur Zeit $t=0$ mögen die Teilchen eines endlichen

Intervalls, etwa von $-\frac{l}{2} \to +\frac{l}{2}$, alle plötzlich die vertikal nach oben gerichtete Geschwindigkeit k erhalten.

Wir zeichnen uns diese Geschwindigkeitsverteilung als Kurve mit den Ordinaten:

$$g(x) = 0 \text{ für } |x| \geqq \frac{l}{2}$$

$$g(x) = k \text{ für } |x| \leqq \frac{l}{2},$$

also einen gebrochenen Geradenzug.

Von dieser Kurve $y = g(x)$ gelangen wir eben weiter zu der Kurve $Y = \int_0^x g(\xi)\, d\xi$, der „Integralkurve" zu der gegebenen „Differentialkurve":

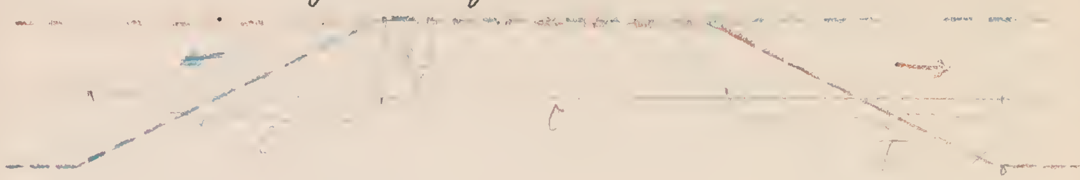
Darauf bilden wir hieraus die beiden Kurven

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^x g(\xi)\, d\xi\,, \quad u_2 = -\frac{1}{2}\int_0^x g(\xi)\cdot d\xi\,,$$

und verschieben dieselben bzgl. nach links und rechts um das Stück t, wodurch wir dann die geometrische Repräsentation der Ausdrücke

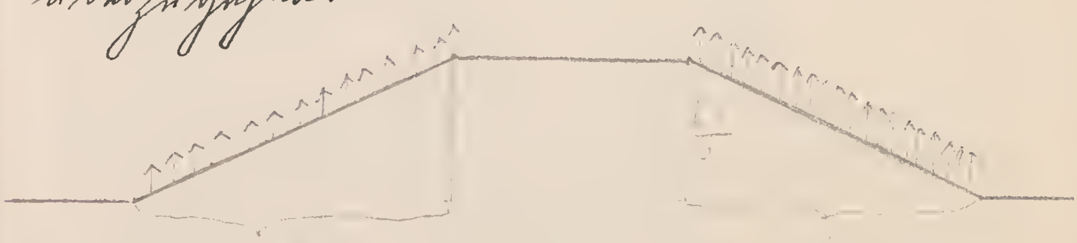
$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^{x+t} g(\xi)\cdot d\xi \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{x-t} g(\xi)\cdot d\xi$$

für ein beliebiges t erhalten.



Superponieren wir endlich diese beiden Kurven, so erhalten wir damit das Bild unserer Saite für den Zeitpunkt t, wo die Bewegung nunmehr folgendermaßen stattfindet:

Einen mittleren Teil der Saite, die mit wachsender Zeit an Ausdehnung fortgesetzt zunimmt, bleibt bei der festen Ordinate $\frac{k \cdot l}{2}$ stehen, während rechts und links auf Strecken von der Länge l sich die Teilchen bemühen, von ihrer Anfangsordinate 0 zu der neuen Ordinate $\frac{k \cdot l}{2}$ überzugehen.



Wir haben im Vorhergehenden die d'Alembertsche Lösung der Differentialgleichung der schwingenden Saite auf den speziellen Fall besonders einfacher Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ angewendet. Diese $f(x)$ und $g(x)$ waren jedoch unstetig, bzw. waren ihre 1. Differentialquotienten unstetig. Also hatten wir auch als Lösungen unserer Gleichung für u Funktionen, ~~erhielt~~ welche im ersten Differentialquotienten nicht mehr stetig waren.

Es erhebt sich nun die Frage, ob dies überhaupt zulässig ist. Streng genommen hat doch unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

nur einen Sinn, wenn wir solche Funktionen u betrachten, welche überall bestimmte zweite, und also gewiss auch erste, Differentialquotienten besitzen. Wir müssten also eigentlich die vorher betrachteten Fälle gerade ausschließen.

Gleichwohl aber behalten unsere Entwicklungen

sehr wohl ihre Bedeutung; denn wir können unsere Beispiele durch beliebig kleine Deformationen in solche Kurven verwandeln, welche zwar sehr rasche Änderungen der Ordinaten aufweisen, nicht aber Unstetigkeiten.

Unsere obigen unstetigen Figuren stellen also zwar nicht direkt Lösungen der Differentialgleichung vor, wohl aber Grenzfälle von Lösungen.

Dieser gemilderte Standpunkt der Approximationsmathematik ist in der Physik sogar durchaus natürlich, da ja alle unsere Voraussetzungen in Wirklichkeit nur approximativ zutreffen und durchweg allerhand störende Nebenwirkungen mitspielen.

Nachdem wir so den Fall der unbegrenzten Saite eingehend betrachtet haben, gehen wir über zu dem Falle der begrenzten Saite, und zwar beginnen wir mit der einseitig begrenz-

ten Saite.

Die Saite sei im Nullpunkte der X Achse festgeklemmt und reiche von dort aus nach rechts hin ins Unendliche.

Der Grundgedanke für die mathematische Behandlung des Problems ist nun einfach der, daß man aus den Bewegungen der beiderseits unbegrenzten Saite speziell diejenigen herausgreift, bei welchen der Punkt 0 ganz von selbst fest bleibt.

In ihnen wird man dann die möglichen Bewegungen der einseitig begrenzten Saite zu erblicken haben.

Die allgemeine Bewegung der beiderseits unbegrenzten Saite entstand, wie wir oben gesehen haben, durch Superposition der Typen a.) und b.) und stellte sich dementsprechend durch die Formel dar

$$u = u_a + u_b,$$

wo

$$u_a = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t), \quad u_b = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\,d\xi$$

waren.

Wenn wir nun verlangen, daß bei der Bewegung die Saite an der Stelle $x=0$ in Ruhe bleibt, so müssen die Funktionen f und g folgenden Bedingungen genügen:

$$„f(t) + f(-t) = 0\text{“ und „}\int_{-t}^{+t} g(\xi)\, d\xi = 0\text{“},$$

da ja die Funktionen u_a und u_r identisch für $x=0$ in t verschwinden sollen.

Also muß sein

$$f(t) = -f(-t),$$

und aus der zweiten Bedingung folgt durch Differentiation nach t

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(\xi)\cdot d\xi - \int_0^{-t} g(\xi)\cdot d\xi\right] =$$

$$g(t) + g(-t) = 0$$

oder

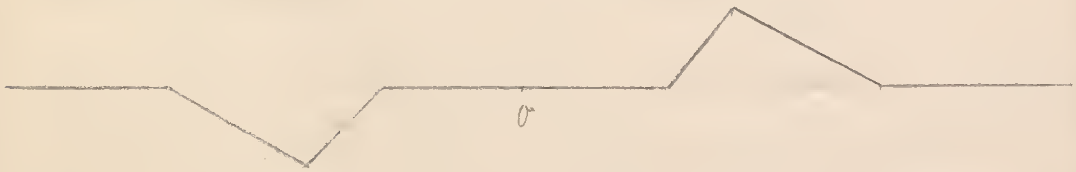
$$g(t) = -g(-t).$$

Es müssen also die Funktionen f und g ungerade Funktionen ihres Argumentes sein, dann und nur dann bleibt der Punkt 0 von selbst in Ruhe.

Wir wollen nun genauer den Typus a) betrachten, und zwar wollen wir anknüpfen an den Spezialfall der „gezupften Saite."
Hülfsweise stellen wir uns die Saite zunächst beiderseits unbegrenzt vor.
Wir haben zu setzen

$$g(x)=0\text{, also wird } u_b=0$$
$$u=u_a.$$

Als Funktion $f(x)$ nehmen wir rechts von 0 eine aus zwei geradlinigen Stücken bestehende Ausbiegung an und müssen jetzt links von 0 eine entsprechende Ausbiegung anbringen, welche gegen die erste zentrisch symmetrisch in Bezug auf 0 liegt, damit nämlich $f(x)$ wirklich eine ungerade Funktion wird.



Die Bewegung der Saite wird nun so vor sich gehen, dass von jeder der beiden Aus-

biegungen aus nach rechts wie nach links eine „Partialwelle" von der wohlbekannten Gestalt ausläuft. Von den nun so entstehenden Partialwellen, welche gewissermaßen beständig symmetrisch in Bezug auf O liegen, interessieren uns vornehmlich die beiden nach innen laufenden. Während die von der linken ursprünglichen Ausbiegung nach rechts hin schreitende Welle über den Punkt O hinweggeht, kommt gleichzeitig die von der rechten Ausbiegung nach links ausgehende Welle über O herüber, derart dass die Saite wirklich in O fortgesetzt in Ruhe bleibt.

Lassen wir nunmehr den links von O liegenden Teil der Saite ganz außer Acht, so können wir den Vorgang auch folgendermaßen beschreiben: „die rechts von O herankommende Partialwelle wird in O „reflektiert" und zwar mit Umkehrung des Vorzeichens der Ordinate, und läuft dann von O nach rechts hin ins Unendliche".

Jetzt können wir den Übergang machen zum Fall der beiderseits begrenzten Saite. Außer im Punkte $x=0$ werde die Saite auch im Punkte $x=l$ fest eingespannt. Wir haben jetzt die zur Anregung im Intervalle 0 bis l gegebenen Ausbuchtung nicht mehr bloß im Punkte $x=0$ zu „spiegeln", – so wollen wir den Tatbestand nach zentrischer Symmetrie kurz nennen – sondern wir haben successive an den Punkten $x=+l, -l, +2l, -2l$, u. s. w. in unbegrenzter Wiederholung zu spiegeln, $f(x)$ besitzt also die Periode $2l$.

Denken wir uns jetzt die Saite aus diesem Anfangszustande plötzlich losgelassen, so sendet jeder dieser Zacken eine Partialwelle sowohl nach links wie nach rechts aus, die mit der Geschwindigkeit 1 fortschreitet. Die Gesamtbewegung derart begrenzten Saite stellt sich daher so dar, daß auf der Oberseite wie auf der Unterseite, sowohl nach rechts als nach links hin, kongruente Partialwellen in

gleichen Abständen hintereinander herlaufen, die sich überall dort, wo zwei einander entgegenlaufende sich treffen, kompensieren. Dabei bleiben die Stellen $x = 0, \pm l, \pm 2l, \dots$ immerfort in Ruhe.

Fassen wir endlich wieder nur das Intervall von $0 \rightarrow l$ ins Auge und ignorieren alle übrigen Teile der Saite, so haben wir damit den Fall der gezupften endlichen, zwischen 0 und l ausgespannten Saite. Wir haben dann den Eindruck, dass die von der ursprünglichen Ausbiegung ausgehenden Partialwellen, wenn sie an die Enden der begrenzten Saite gelangen, allemal mit Zeichenwechsel der Ordinate reflektiert werden.

Nachdem wir uns so durch Analogieschlüsse über die Bewegung der begrenzten, gezupften Saite Aufklärung verschafft haben, wollen wir zusehen, wie sich das Ergebnis analytisch bestätigt.

Wir müssen offenbar diejenigen d'Alembertschen Lösungsansätze heraussuchen, welche für $x=0$ und $x=l$ identisch in t verschwinden.

Hieraus ergeben sich für f folgende Bedingungen

$$f(t) + f(-t) = 0$$

und $$f(l+t) + f(l-t) = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen besagt, daß f eine ungerade Funktion seines Argumentes sein muß. Mit Benutzung dieser Beziehung folgt aus der zweiten Gleichung

$$f(t+l) = f(t-l)$$

wo wir hier $t-l = \tau$ einsetzen wollen, sodaß wir haben

$$f(\tau + 2l) = f(\tau),$$

d.h. f muß auch noch eine periodische Funktion seines Arguments von der Periode $2l$ sein.

Die Bewegung der gezupften Saite, die beiderseits begrenzt ist, findet sich nach den Versuchen von Helmholtz (mit dem Vibrationsmikroskop verwirklicht in den Schwingungen einer „gestrichenen" Violinsaite. Man hat nämlich das „Streichen" der Saite als ein in sehr kurzen Intervallen immer wiederholtes „Zupfen" anzusehen, insofern der durch Kolophonium rauh gemachte Violinbogen an der Streichstelle die Saite fortgesetzt abwechselnd ein Stückchen mitnimmt und sie dann wieder los schnellen läßt.

diese Ausführungen über den Typus a) übertragen sich in ganz analoger Weise auf den Typus b).

Wir erhalten hier die Bewegung beiderseits begrenzter Saiten von der Länge l, wenn wir in der d'Alembert-schen Lösung u_t die Funktion g ungerade und um $2l$ periodisch annehmen.

Um die Bewegung der begrenzten angeschlagenen Saite auf die Bewegung der einbegrenzten angeschlagenen Saite zurückzuführen, haben wir die Funktion $g(x)$, die im Intervalle von 0 bis l gegeben ist, an den Punkten $x=0$, $x=\pm l$, $x=\pm 2l$ – zu spiegeln.

Die Überlegungen, die sonst zu machen sind, sind genau analog denjenigen bei der gezupften Saite, so daß wir hier nicht weiter darauf einzugehen brauchen.

Im Folgenden wollen wir noch eine zweite Art der Lösung des Problems betrachten, wie sie von Simon Ohm und Helmholtz angegeben ist.

Da das Ohr als „reinen Ton" Sinusschwingungen empfindet, so werden wir eine partikuläre Lösung unserer Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ansetzen können in der Form

$$u = \left.\begin{matrix}\sin \lambda t\\ \cos \lambda t\end{matrix}\right\} \cdot \varphi_\lambda(x).$$

Nun sagt das Ohmsche Prinzip aus; „Man hört den Ton einer Saite als Überlagerung von reinen Tönen."

Für φ_λ ergiebt sich, ~~dann~~ wenn wir die partikuläre Lösung noch mit einer Phase ~~von~~ t_λ ansetzen

$$[u_\lambda = \sin \lambda(t - t_\lambda) \cdot \varphi_\lambda(x)]$$

folgende charakteristische Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial x^2} = -\lambda^2 \cdot \varphi_\lambda,$$

einer Gleichung, deren Integration wir früher auseinandergesetzt haben, die uns das Resultat

$$\varphi_\lambda = C_\lambda \sin \lambda (x - x_\lambda)$$

liefert.

Die allgemeinste Schwingung unserer unbegrenzten Saite, ~~ist~~ die einem reinen Ton entspricht, ist also

$$u_\lambda = C_\lambda \cdot \sin \lambda (t - t_\lambda) \cdot \sin \lambda (x - x_\lambda)$$

die wir auch schreiben können $u_\lambda = (A_\lambda \cos \lambda t + B_\lambda \cdot \sin \lambda t) \sin \lambda (x - x_\lambda)$

Das Ohm'sche Prinzip behauptet nun, dass die allgemeinste Schwingung der unbegrenzten Saite überhaupt eine Überlagerung solcher reiner Töne sei. Dementsprechend werden wir die allgemeinste Lösung des Problems in folgender Form ansetzen können:

$$u = \sum^{\lambda} C_\lambda \sin \lambda (t - t_\lambda) \cdot \sin \lambda (x - x_\lambda)$$

Spezialisieren wir diese allgemeinen Betrachtung für die begrenzte Saite.

Wir nehmen die Saite an den Punkten $x=0$ und $x=l$ wieder fest an, so daß hier also dauernd $u=0$ ist.

Wir haben dann aus der Gleichung $\sin\lambda \cdot x_\lambda = 0$

$$x_\lambda = 0 \qquad \text{und aus der Gleichung } \sin\lambda(l-x_\lambda)=0$$

$$\lambda = \frac{n\cdot\pi}{l}\text{; wenn } n = 1, 2, 3, 4 \ldots \text{ ist.}$$

Der allgemeinste Ausdruck, welcher bei der begrenzten Saite einen reinen Ton darstellt, ist also

$$u_n = C_n \cdot \sin\frac{n\cdot\pi}{l}\cdot(t-t_n)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l},$$

das wir auch schreiben können

$$u_n = \left(A_n \cos\frac{n\pi t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

wo wir für λ jetzt überall den Index n haben, der die Werte

$$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

durchläuft.

Wenden wir jetzt wieder das Ohm'sche Prinzip an.

Nach dem obigen Prinzip wird dann die allgemeinste Schwingung der begrenzten Saite angegeben durch

$$u = \sum u_n = \sum\left(A_n \cdot \cos\frac{n\pi t}{l} + B_n \cdot \sin\frac{n\pi t}{l}\right) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Sind für $t=0$ die Anfangslage der Saite $u_0 = f(x)$ und die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$ vorgegeben, so können wir aus unseren früheren Betrachtungen folgern, dass $f(x)$ und $g(x)$ ungerade Funktionen mit der Periode $2l$ sein müssen, damit die Punkte $x=0$ und $x=l$ bei der so vorgeschriebenen Bewegung wirklich in Ruhe bleiben.

Die Frage ist nun, ob wir unsere u_n so einrichten können, dass sie diesen allgemeinen Bedingungen genügen.

Die praktische Fragestellung geht darauf hinaus, ob wir mit einer endlichen Anzahl von Summengliedern vorgegebene Anfangswerte hinreichend genau approximieren können;

sie wird ohne weiteres durch die Besselsche Formel erledigt: Es ist bei $t=0$

$$u_0 = \sum_1^N A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sim f(x)$$

und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^N B_n \cdot \frac{n\pi}{l} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} \sim g(x).$$

Die Besselsche Formel bestimmt ja ohne weiteres die Konstanten A_n und B_n so, daß die Annäherung an die vorgeschriebenen Werte möglichst gut wird.

Die theoretische Fragestellung geht darauf hinaus, ob wir mit der unendlichen Summe die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ wirklich darstellen können. Diese abstrakte Form der Fourierschen Formel verlangt eingehende Konvergenz-Untersuchungen.

Vor allem dürfen wir aber auch nicht ein-fach voraussetzen, daß die unendliche Reihe ohne weiteres differenzierbar ist.

Bei der Voraussetzung der Konvergenz der

unendlichen Reihe können wir die Funktion

$$f(x) = (u)_{t=0} = \sum_1^\infty A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

gleichmässig wirklich darstellen und bei Voraussetzung der Differenzierbarkeit auch die Funktion

$$g(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_1^\infty B_n \cdot \frac{n\pi}{l} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Nach Fouriers Methode bestimmen sich die Koeffizienten A_n und B_n so, dass die $f(x)$ und $g(x)$ wirklich genau dargestellt werden, immer vorausgesetzt natürlich, dass $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen sind, die nicht ganz besondere Singularitäten haben, die also z. B. den Dirichlet-schen Bedingungen genügen.

Wir haben also scheinbar gute Resultate. Aber unser Zweifel bezieht sich darauf, ob denn das so konstruierte u auch wirklich der vorgeschriebenen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

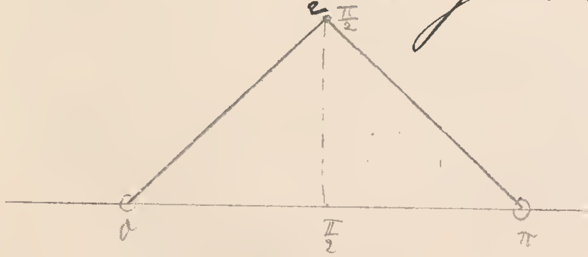
genügt!

Das u braucht nämlich nicht der vorgelegten partiellen Differentialgleichung zu genügen, trotzdem alle Summanden, aus denen es zusammengesetzt ist, dieser Gleichung genügen, denn man weiß nicht, ob die Summe gliedweise differenziert werden kann.

Dieser Umstand, der sogar von den größten Autoren (z. B. Helmholtz) übersehen ist, bedingt grundlegende Fragen.

Wir wollen, um uns eine Anschauung von dem Fehler zu verschaffen, das Beispiel der „gezupften Saite" betrachten.

Die Saite erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = \pi$ und werde so gezupft, daß bei $x = \frac{\pi}{2}$ gerade die Ordinate $\frac{\pi}{2}$ vorhanden ist.



Diese so vorgegebene Funktion $f(x)$ können

wir annähern durch eine trigonometrische Reihe von folgender Bauart:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \frac{\sin 7x}{49} + \cdots\right)$$

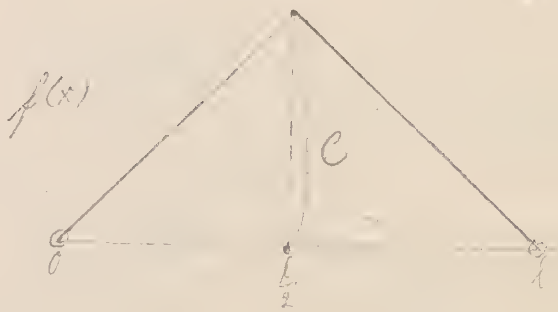
[cfr. Klein: Differential- u. Integralrechnung II: pg: 192–193]

wo wir noch für x, wenn wir das Intervall nicht bis π, sondern bis l gehen lassen, einzusetzen haben:

$$\frac{\pi x}{l},$$

so dass wir jetzt folgende Funktion haben:

$$f(x) \sim y = \frac{8c}{\pi^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi x}{l}}{25} - + \cdots\right)$$

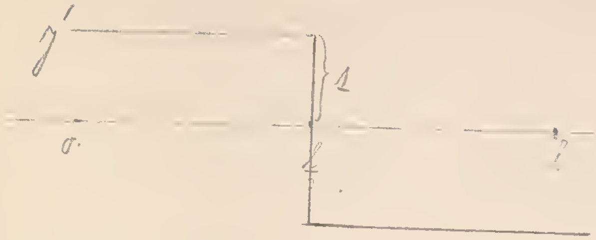


Wenn wir jetzt gliedweise die Reihe differenzieren und uns so die y' und y'' herstellen, so erhalten wir

$$y' = \frac{8c}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{l}\right)\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{1} - \frac{\cos\frac{3\pi x}{l}}{3} + \frac{\cos\frac{5\pi x}{l}}{5} - \cdots\right],$$

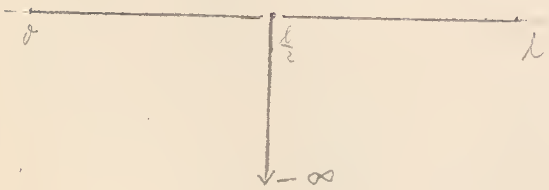
diese Reihe ist noch konvergent und stellt

wenn dann bei $x = \frac{l}{2}$ die Ordinate c erscheinen soll, so ist sie außerdem noch zu multiplizieren mit $\frac{2c}{\pi}$.



also richtig den Wert des y' dar. Wenn wir dagegen die Reihe ein zweites Mal differenzieren, so ergibt sich

$$\frac{8c}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left[-\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1}+\frac{\sin\frac{3\pi x}{l}}{1}\mp\frac{\sin\frac{5\pi x}{l}}{1}+\dots\right],$$



eine Reihe die keineswegs mehr konvergiert und in keiner Weise den Verlauf des y'' dar.

Die Reihenfolge der Näherungskurven approximiert nicht nur die Ordinate, sondern auch den ersten Differentialquotienten, sie approximiert in keiner Weise den zweiten Differentialquotienten.

(cfr. auch Klein: Differential- u. Integralrechn. II pg. 223-226)

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen kommen wir zum Kern der Sache. Wir wollen die Schwingungen der Saite untersuchen, welche durch die Anfangslage festgelegt sind

$$(u)_{t=0} = \frac{8c}{\pi^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi x}{l}}{25} - + \cdots\right)$$

Wir können nun jedem Glied dieser Reihe sofort eine Partikularlösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

zuordnen, indem wir geeignete, von t abhängige Faktoren hinzufügen, nämlich indem wir bilden:

$$u_1 = \sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi t}{l}$$

$$u_2 = \sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi t}{l}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wir versuchen nun, diese bestimmten Cosinusfaktoren in die obige Reihenentwicklung einzuführen; es scheint so, als ob man die Saitenbewegung der Saite durch folgende Formel darstellen könnte

$$u = \frac{8c}{\pi^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi t}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi t}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi t}{l}}{25}\right.$$

die jedenfalls den Anfangsbedingungen genügt.

Man schließt nun sehr häufig folgendermaßen: Da jedes Glied der Reihe die Gleichung befriedigt, so muß die Reihe eine Lösung der Differentialgleichung sein.

In diesem Schluss liegt der Fehler, denn die aufgestellte Reihe für u ist, wie wir oben gesehen haben, nicht zweimal differenzierbar.

Obwohl nun diese Schlußweise völlig falsch ist, ist aber trotzdem das Resultat durchaus richtig. Dies können wir auf einem anderen Wege leicht beweisen.

Wenn wir die d'Alembert-sche Lösung

$$u = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t)$$

auf unsere gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{8c}{\pi^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi x}{l}}{25} - + \cdots\right]$$

anwenden, so erhalten wir

$$u = \frac{8c}{2\pi^2}\left[\left(\frac{\sin\frac{\pi(x+t)}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi(x+t)}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi(x+t)}{l}}{25} - + \cdots\right) + \left(\frac{\sin\frac{\pi(x-t)}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi(x-t)}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi(x-t)}{l}}{25} - + \cdots\right)\right]$$

Wenn wir dies mit Hülfe der trigonometrischen Additionstheoreme zusammenziehen, so ergiebt sich gerade die obige Formel

$$u = \frac{8c}{\pi^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi t}{l}}{1} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi t}{l}}{9} + \frac{\sin\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi t}{l}}{25} - + \cdots\right]$$

Wir können zum Abschluß unser Resultat in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Sollen wir überhaupt in der Theorie der Saitenschwingung unstetige Lösungen zulassen wollen, (natürlich als Grenzfälle von stetigen Lösungen), so gilt unsere ganze Ableitung der d'Alembertschen Lösung und schließlich auch das trigonometrische u.

Umgekehrt, wie es gewöhnlich in der Litteratur geschieht, aus dem bloßen Zusammenhange der Reihenglieder des y und des u nicht nur auf die Theorie des u, sondern auch auf die Berechtigung unstetiger Lösungen schließen zu wollen, ist ganz unrichtig.

Wir verlassen hiermit die Schwingungsgleichungen, und gehen über zu der

<u>Partiell. Differentialgleichung d. Wärmeleitung,</u>

die wir im Falle des Stabes in der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

angesetzt haben. u bezeichnet hier die Temperaturverteilung in der Raumkoordinate. Da nun diese Temperaturverteilung auch von der Zeit abhängig ist, so können wir unser u wieder als Fläche modellieren.

Es werden folgende beiden Aufgaben sich ergeben:

1.) Es liegt ein <u>unbegrenzter Stab</u> vor, zur Zeit $t=0$ ist die Temperaturverteilung $u=f(x)$ willkürlich vorgegeben.

2.) Es liegt ein <u>begrenzter Stab</u> von der Länge l vor, ~~dessen~~ ~~beliebigen~~ Temperaturverteilung ist so vorgegeben, daß sie bei $t=0$ $u=f(x)$ sein soll und im Verlaufe der Zeit bei beliebigem t für $x=0$ und für $x=l$ immer $u=0$ sein soll.

Zur Integration dieser Gleichung dienen uns genau den bei der vorigen Gleichung auftretenden Methoden ganz analoge Methoden.

Wir haben:

1.) Methode der Überlagerung periodischer trigonometrischer Elementarlösungen.

2.) Eine Methode, welche das Analogon der d'Alembertschen Lösung darstellt, sofern wir nur diese letztere passend modifizieren.

Diese letztere wollen wir zunächst betrachten.

Die d'Alembert-sche Lösung sagt bekanntlich aus, daß bei einer gegebenen Anfangslage $f(x)$ von dieser Anfangslage 2 Wellen ausgehen

$u = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t)$.

Man kann nun diese d'Alembert-sche Lösung der Saitenschwingung so aussprechen, daß man sagt, jede einzelne Ordinate giebt eine nach links oder nach rechts fortschreitende Welle von halber Höhe und die einzelnen Ordinaten überlagern sich alle.

Nach dieser Methode wollen wir nun vorgehen. In einen einzelnen Punkt eines unbegrenzten Stabes bringen wir das Wärmequantum 1, so daß die Temperatur dort für einen Augenblick unendlich wird.

Wenn wir dann für diesen Fall eine Lösung, eine sog. „Grundlösung" kennen, so können wir eine allgemeine Lösung durch Überlagerung von solchen Grundlösungen herstellen.

Wir behaupten nun

$$u = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

ist eine solche Grundlösung. Daß sie in der Tat unserer Wärmeleitungsgleichung befriedigt, sehen wir, wenn wir differenzieren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{8\sqrt{\pi \cdot t^5}}\left(x^2 - 2t\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{8\sqrt{\pi t^5}}\left(x^2 - 2t\right)$$

Um die Art der Wärmeverteilung kennen zu lernen, betrachten wir zunächst die Ebene $t = t_0$. Die Schnittkurven dieser Ebene

$$\mu = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t_0}}}{2\sqrt{\pi \cdot t_0}}$$

sind offenbar „Gauss'sche Fehlerkurven."
[über diese Kurven cfr. Klein: Differential- u. Integralrechn. II: pg: 278-286]

Wir brauchen nur

$$\frac{1}{4t_0} = h^2$$

zu setzen, um genau die Form

$$u = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2x^2}$$

zu haben, in der man diese Kurven gewöhnlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ansetzt.

Der sog. „Parameter" der Fehlerkurven ist offenbar

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_0}}.$$

Der Parameter der Gauss'schen Fehlerkurve wächst umgekehrt proportional mit dem t_0 und es entsteht für $t = 0$ die charakteristische

Grenzfall, daß der Parameter ∞ wird und so die ~~ge~~ von der Kurven umschlossenen Flächeninhalt in die Ordinate zusammengedrängt wird;

Im Momente $t=0$ ist also die Temperatur in einem Punkte unendlich, während sie sonst im ganzen Stabe gleich 0 ist. Es entspricht dies genau unseren vorgeschriebenen Anfangsbedingungen.

Daß diese Gauß'schen Fehlerkurven alle mit der X-Achse den Flächeninhalt 1 einschließen, entspricht dem, daß wir wirklich dem einen Punkte das Wärmequantum 1 zugeführt haben.

Wir wollen uns zur genaueren Orientierung noch die Wendepunkte aller dieser Gauss-schen Fehlerkurven bestimmen. Dazu haben wir zu setzen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

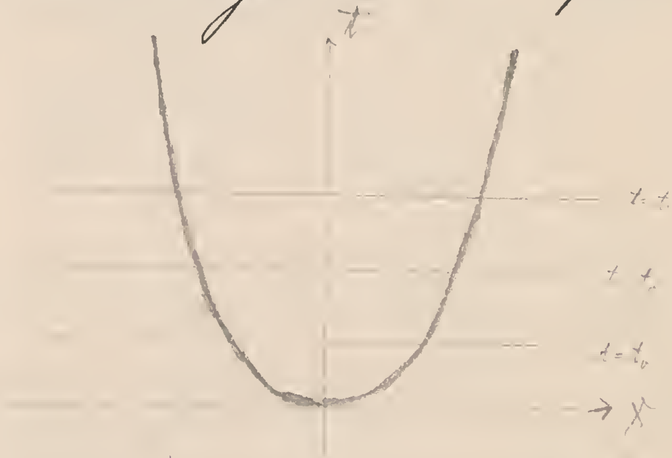
also $\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{8\sqrt{\pi}\, t^5}\,(x^2-2t)=0.$

Da der erste Faktor nicht verschwinden kann, so ist

$$x^2-2t=0$$

die Bedingung der Wendepunkte.

Es ergiebt sich also als geometrischer Ort für die Wendepunkte eine Parabel in der (x,t) Ebene



Legen wir ferner Schnitte parallel zur (u,t) Ebene, so haben wir an den Punkten

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

horizontale Tangenten und zwar liegen Maxima vor.

In den Produkten

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{8\sqrt{\pi \cdot t^5}}}\left(x^2 - 2t\right) = 0$$

kann aber wieder nur der zweite Faktor verschwinden.

Dieselben Punkte der Fläche also, welche in den Parallelebenen zur $(U\,X)$ Ebene Wendepunkte der Gauss-schen Fehlerkurve sind, sind in den Ebenen parallel zur $(U\,T)$ Ebene Maxima der Ordinaten.

Wenn wir das Wärmequantum 1 nicht in den Punkt $x=0$, sondern in den Punkt $x=\alpha$ brächten, so würde die Hauptlösung lauten

$$u = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi \cdot t}}.$$

Wenn nun zur Zeit $t=0$ irgend eine Wärmeverteilung $\Phi(\alpha)$ vorgegeben ist, so gehen wir nach unserer Verabredung zur Integration der Gleichung folgendermaßen vor:

Wir zerschneiden das Intervall, in dem sich die Funktion $\Phi(\alpha)$ erstreckt, in schmale Streifen $d\alpha$

Auf einen solchen schmalen Streifen entfällt dann das Wärmequantum $\Phi(\alpha)\cdot d\alpha$. Bei verschwindendem $d\alpha$ können wir das Intervall $d\alpha$ als einen Punkt ansehen, in dem wir das Wärmequantum $\Phi(\alpha).d\alpha$ gebracht hätten.

Für diesen Fall würde die Lösung unserer Gleichung

$$u = \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\Phi(\alpha).d\alpha,$$

Um die allgemeine Lösung zu haben, haben wir schließlich noch über alle die Streifen $d\alpha$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summieren, so daß wir die allgemeinste Lösung in folgender Form erhalten:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\cdot\Phi(\alpha)\cdot d\alpha$$

Es ist die erste Aufgabe, die man stellen kann, mit Hülfe der Hauptlösung erledigt.

Wir gehen nunmehr zum begrenzten Stabe über, den wir wieder von 0 bis l reichen lassen. In dem Intervalle von Null bis l ist irgend eine Temperaturvertheilung $\Phi(x)$ vorgegeben und die Bewegung der Wärme soll so vor sich gehen, daß an den Punkten $x = 0$ und $x = l$ immer $u = 0$ ist.

In unserer allgemeinen Formel steckt die Lösung für den begrenzten Stab von selbst mit drin, sobald wir nur die Function Φx als eine ungerade Function von der Periode $2l$ einführen. In diesem Falle lautet

Die Lösung

$$u = \int_0^l \frac{e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}}{2\sqrt{2t}} \cdot \Phi(\alpha) \cdot d\alpha . + \cdots\cdots$$

Summe über alle Halbperio[den] von $\Phi(\alpha)$ ... und zwar genommen mit den Zeichen ±.

Im Anschluss hieran knüpft sich noch folgende interessante Aufgabe an:

Im Punkte $x=0$ bringen wir zwei Wärmequellen von entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit an. Wie wird die Temperaturvertheilung in dem Stabe sein?

~~[Der Einfachheit halber nehmen wir hierbei an, dass man das Wärmequantum 1 zuführen, bezw. entziehen].~~

Wir lassen zunächst die negative Wärmequelle im Punkte $x=0$, die positive im Punkte dx angreifen. Dann ist offenbar

$$u = \frac{\dfrac{e^{-\frac{(x+dx)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} - \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}}{dx} .$$

Die Ergiebigkeit ist $\frac{1}{dx}$ proportional dem Abstand dx.

Lassen wir jetzt die beiden Angriffspunkte der Wärmequellen immer näher zusammenrücken, d. h. bilden wir

$$\lim dx = 0,$$

so wird einfach

$$\mu = \lim_{dx=0} \left[\frac{e^{-\frac{(x+dx)^2}{4t}} - e^{-\frac{x^2}{4t}}}{dx} \right]$$

Dies ist aber der Differentialquotient der früheren Hauptfunktion nach x,

$$\frac{\partial \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}}{\partial x} = - \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\sqrt{\pi \cdot t^3}}.$$

Wir bekommen also eine Temperaturverteilung

$$\mu = \frac{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\sqrt{\pi \cdot t^3}}$$

Sie ist für $x = 0$ dauernd 0 mit Ausnahme von $t = 0$. Wärmestoss im Anfangspu[nkt]

Die drei hier behandelten Fälle erläutern gerade diejenigen 3 Funktionen, welche bei eindimensionaler Betrachtung des Wärmeleitungsproblems immer wieder vorkommen.

Wir haben jetzt die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

nach der andern Methode zu versuchen, die wir uns zu Beginn der Betrachtung vorgestellt haben, der Methode der Überlagerung trigonometrischer Elementarlösungen.

Zu diesem Zwecke setzen wir unser u in folgender Weise an:

$$u = \left.\begin{matrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{matrix}\right\}\cdot\psi_\lambda(t).$$

Es ergibt sich dann für $\psi_\lambda(t)$ die charakteristische Gleichung

$$\frac{d\,\psi_\lambda(t)}{dt} = -\lambda^2\cdot\psi_\lambda(t),$$

einer Gleichung, deren Integration uns früher zu der Lösung geführt hat

$$\psi_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 t},$$

so dass wir haben

$$u = \left.\begin{matrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{matrix}\right\}\cdot e^{-\lambda^2 t}.$$

Bei einem begrenzten Stabe von der Länge l hat man wieder zur Zeit $t=0$ die Temperaturvertheilung $\Phi(x)$ gegeben und vorauszusetzen, dass an den Punkten $x=0$ und $x=l$ dauernd die Temperatur 0 herrsche. Es ist dann bekanntlich $\Phi(x)$ eine ungerade, um $2l$ periodische Function, so dass

$$\lambda = \frac{n\cdot\pi}{l}$$

ist, und sich $\Phi(x)$ in die Fourier'sche Reihe

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

entwickeln lässt.

Wir können infolgedessen die allgemeine Lösung unserer Gleichung in der Form

$$u = \sum_0^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Diese letzte Formel giebt die Verbreitung der Wärme in unserem Stabe an.

Wir kommen nunmehr zu der letzten partiellen Differentialgleichung aus dem Gebiete der Physik, die wir hier betrachten wollen, der

partiell. Differentialgleich. d. Potentials.

Wir haben hier die Gleichung

$$\Delta u = 0,$$

die wir entweder in 1, od. in 2, od. auch in 3 Raum-Koordinaten ansetzen können:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn zwei Massenpunkte sich einander anziehen, so existiert eine Kraftfunktion

$$\frac{c}{r} \;,$$ wo r die Entfernung der Punkte angibt, die wir als Potential bezeichnen.

Im Raum ist

$$\frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \;,$$

eine Funktion die wir als „Newtonsches Potential" bezeichnen.

Dieses Potential der Newtonschen Anziehung

ist eine solche Funktion von (x, y, z), daß sie, nach x, y, z partiell differenziert, die Kraftkomponenten liefert, die für den Punkt (x, y, z) in Betracht kommen,

$$X = -\frac{\partial\left(\frac{c}{r}\right)}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\left(\frac{c}{r}\right)}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\left(\frac{c}{r}\right)}{\partial z}.$$

Wenn die Kräfte nur dem Newtonschen Gesetze folgen, dann erhalten wir als Potential der Newtonschen Anziehung ~~für~~ mehrerer Massenpunkte die Formel

$$u = \sum_{i=1,2,3\ldots} \frac{c_i}{r_i},$$

und für das Potential einer ausgedehnten Menge von Massenpunkten

$$u = \iiint \frac{\rho(a,b,c)\, da\, db\, dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

Lösungen, die sämtlich unserer partiellen Differentialgleichung befriedigen:

$$\Delta u = 0,$$

sofern nur der Punkt x, y, z nicht gerade in den Bereich der anziehenden Punkte hineinfällt.

Der Theorie des Newtonschen Potentials mit ihren 3 Veränderlichen x, y, z stellt sich eine analoge Theorie mit 2 Variabeln x und y an die Seite, die Theorie des logarithmischen Potentials.

Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt die Funktion

$$u = \log r = \log\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

wie man leicht verifizieren kann.

Wegen dieser auftretenden Logarithmus-Funktion nennt man das Potential „logarithmisches Potential".

Im übrigen sei nur noch bemerkt, daß die Gleichungen

$$\Delta u = 0$$

in den verschiedensten Gebieten der mathematischen Physik eine grundlegende Rolle spielen.

Da wir schon mehrfach weiter oben die Integration der Differentialgleichung des ~~mathe-~~

Potentials durchgeführt haben, gehen wir zunächst auf den Integrationen unserer Gleichung nicht näher ein, sondern betrachten eine interessante *Beziehung unserer Gleichung zur Funktionentheorie komplexer Veränderlicher*.

Da wir unsere Gleichung des logarithmischen Potentials

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

auch schreiben können

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

so sehen wir, dass sie sich von der Gleichung der Saitenschwingungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

wenn wir von der Bedeutung der Koordinaten absehen, nur durch das Vorzeichen der rechten Seite unterscheidet.

1.) Wenn wir, da diese Beziehung besteht, das d'Alembert-sche Integral schlechthin auf unseren Fall übertragen, so wird es in allgemeinster Weise gleichgesetzt werden können:

$$u = \varphi(x+iy) + \chi(x-iy),$$

dessen Richtigkeit durch einfaches Ausdifferenzieren verificirt werden kann.

2.) Unser zweiter Schritt besteht darin, daß wir das Reelle vom Imaginären trennen. Wir haben:

$$\varphi(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y),$$

wo $U(x,y)$ den reellen, $iV(x,y)$ den imaginären Bestandtheil darstellt.

Die conjugirte Function ist nun

$$\bar{\varphi}(x-iy) = U(x,y) - iV(x,y),$$

so daß wir finden

$$U(x,y) = \frac{\varphi+\bar{\varphi}}{2}$$

und

$$V(x,y) = \frac{\varphi-\bar{\varphi}}{2i}$$

U und V genügen ebenfalls unserer Gleichung

$$\Delta u = 0.$$

Hiermit haben wir eine unerschöpfliche Fundgrube, um neue Functionen von x und y in beliebiger Anzahl aufzustellen, die der Gleichung $\Delta u = 0$ genügen.

3.) Die Lösungen der Gleichung

$$\Delta u = 0$$

gehören paarweise zusammen, indem sich nämlich immer zu einer Lösung $U(x,y)$ eine andere Lösung $V(x,y)$ finden läßt, welche mit dem U durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

verbunden ist.

Diese beiden Differentialgleichungen heißen <u>die „Cauchyschen Gleichungen"</u>, die Funktionen $U(x,y)$ und $V(x,y)$ heißen <u>„zusammengehörigen Funktionen"</u>.

4.) Umgekehrt ging Riemann (1853) vor, er ging von den Cauchyschen Gleichungen aus und machte folgende Überlegung:

Aus den Cauchyschen Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

findet man zwei Funktionen

$$U(x,y) \text{ und } V(x,y),$$

die den Gleichungen genügen

$$\Delta U = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta V = 0.$$

Hat man nun 2 reelle Funktionen U und V von 2 reellen Veränderlichen (x und y), welche den Cauchyschen Gleichungen genügen, dann und nur dann nennt Riemann

$U + iV$ eine Funktion $\varphi(x+iy)$

bzw. $U - iV$ die konjugierte Funktion $\bar{\varphi}(x-iy)$.

Alles was soweit über Funktionentheorie gedacht werden kann, hat unmittelbare Bedeutung für die Gleichung $\Delta u = 0$ bei zwei Veränderlichen. Wenn dementsprechend die Gleichung $\Delta u = 0$ ein besonders eingehendes Studium erfahren hat, so ist sie dadurch das Modell geworden für das Studium anderer partieller Differentialgleichungen von ähnlicher Bauart.

Wir sind hier in unserer Besprechung einiger-
maßen vorgegangen, wir haben zunächst die
andern partiellen Differentialgleichungen der
Physik behandelt und sind bis jetzt auf zwei
Weisen zum Ziele der Integration gekommen,

1) mit Hauptlösungen
2) mit trigonometrischen Lösungen.

Für die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

hatten wir eine Hauptlösung angesetzt in
der Form

$$u = \log r = \log \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

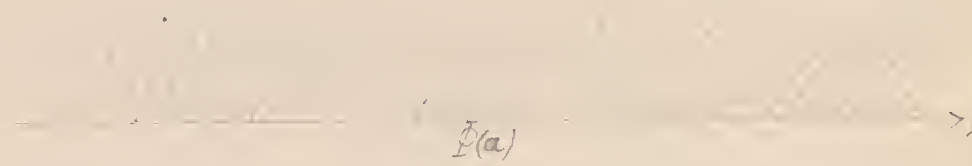
als weitere Hauptlösungen haben wir dann die
verschiedenen Differentialquotienten ~~nach~~ x
oder y, so z. B.

$$u = \frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

od. $$u = \frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

und so könnten wir weiter differenzieren

Wir wollen hierauf jedoch nicht näher eingehen, sondern uns der Behandlung einer Randwert-aufgabe zuwenden.



Längs der x Achse sei das Potential ~~als~~ $\Phi(a)$ gegeben, wir sollen eine Funktion u finden, die auf der schraffierten Halbebene durchaus stetig verläuft und der vorgeschriebenen Randbedingung genügt.

Wir setzen in diesem Falle die Funktion ~~u~~ an in ~~der~~ einer Form, die der Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung ganz ähnlich ist,

$$u = C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \cdot \frac{y}{(x-a)^2+y^2} \cdot da,$$

wobei wir der Einfachheit halber $b = 0$ gesetzt haben.

Diese Formel ist in der Tat richtig, sobald wir

der Konstanten C den Wert $\frac{1}{\pi}$ geben, so daß es heißt

$$u = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a) \cdot \frac{y}{(x-a)^2+y^2} \cdot da$$

Daß dieser Ansatz in der Tat die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

befriedigt, wollen wir an einem einfachen Beispiel beweisen.

Beispiel:

Die vorgegebene Funktion $\Phi(a)$ habe im Intervalle von x_0 bis x_1 den Wert 1, sonst

durchweg den Wert 0. Unser Ansatz führt in diesem Falle über in

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \frac{y}{(x-a)^2+y^2} \cdot da ,$$

das wir nach einer einfachen Umformung sofort integrieren können:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\frac{da}{y}}{1 + \frac{(x-a)^2}{y^2}}$$

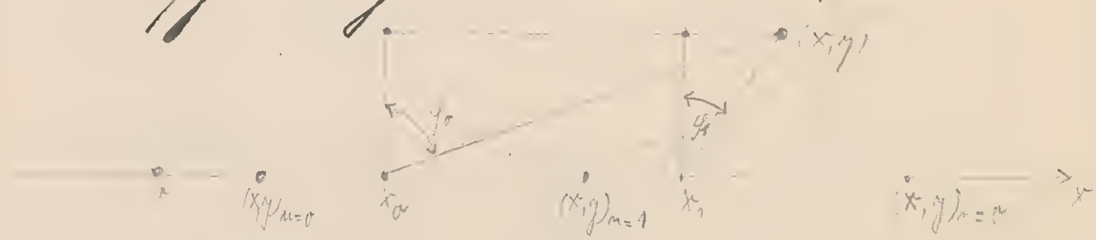
$$= \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\left(\frac{a-x}{y}\right)}{1 + \frac{(a-x)^2}{y^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{a-x}{y} \right]_{x_0}^{x_1}$$

Unsere Formel ergiebt in dem einfachen Falle des von uns angenommenen Randwerts

$$u = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x_1 - x}{y} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x_0 - x}{y} \right)$$

daß dies in der Tat die richtige Lösung unseres Randwertproblems ist, werden wir leicht sehen, wenn wir das Resultat geometrisch interpretieren.



Ein Punkt (x,y) im Innern unserer Halbebene ist ~~mit~~ mit den Punkten x_0 und x_1 verbunden. Die Verbindungslinien schließen mit den Loten in x_0 und x_1 die Winkel φ_0 bezw. φ_1 ein. Es ist dann

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x - x_0}{y}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x - x_1}{y},$$

sodass wir für den Punkt (x, y) haben

$$u = \frac{1}{\pi}(\varphi_0 - \varphi_1),$$

eine Funktion, die durchweg stetig ist.

Lasse ich nun den Punkt $(x\,y)$ links von x_0 auf die X-Achse rücken, so wird

$$\varphi_0 = \varphi_1 = -\frac{\pi}{2},$$

also $u = 0$.

Rückt der Punkt (x, y) zwischen die Punkte x_0 und x_1 auf die X-Achse, so wird

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2},$$

mithin ergiebt sich $u = 1$.

Rückt schließlich der Punkt (x, y) rechts von x_1 auf die X Achse, so wird

$$\varphi_0 = \varphi_1 = +\frac{\pi}{2},$$

folglich $u = 0$.

In der That nimmt also die Funktion

$$u = \frac{1}{\pi}(\varphi_0 - \varphi_1)$$

für die Punkte der X Achse in vorgeschriebener Weise je nachdem den richtigen Werth 0 und 1 an.

Wenn wir unsere Speziallösung

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(a)\cdot y\cdot da}{(x-a)^2+y^2}$$

anwenden wollen auf den Fall der begrenzten X Achse, so nehmen wir im allgemeinsten Falle die X Achse nur von 0 bis l und setzen weiter voraus, daß an den Punkten $x=0$ und $x=l$ u dauernd gleich 0 sein soll.

Die Lösung dieses Problems ist dann unmittelbar in der obigen Formel enthalten, wenn wir nur $\Phi(a)$ als eine ungerade und um 2l periodische Funktion seines Argumentes wählen.

Wir wollen noch einen andern, sehr interessanten Randwertaufgabe betrachten:

Längs einem Kreise vom Radius R ist das Potential als eine Funktion des Centriwinkels, $\Omega(\psi)$, gegeben.

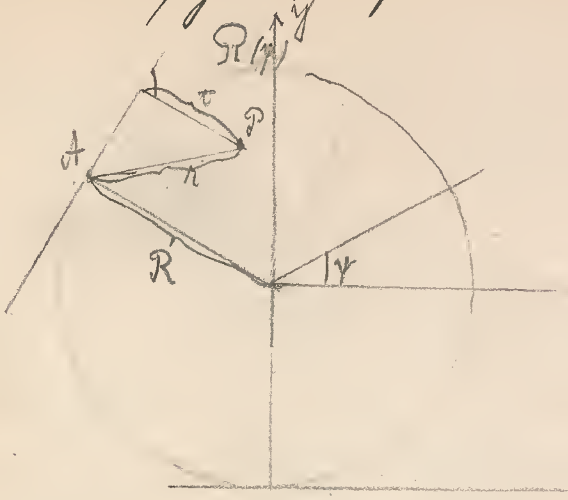
Wir legen das XY System so, daß der Nullpunkt auf die Peripherie fällt und die Y-Achse Durchmesser wird. Alsdann lautet die Gleichung des Kreises

$x^2+y^2-2Ry=0$ oder $2R\cdot\frac{y}{x^2+y^2}-1=0$

Wir hatten aber eine Grundlösung in der Form

$$u = \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{\partial \log \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

woraus wir sehen, daß die linke Seite der letzten Gleichung eine Grundlösung für den Nullpunkt ist, und zwar wird diese Grundlösung für alle anderen Punkte des Kreises selbst Null.



Die so gefundene Grundlösung für den Nullpunkt läßt sich aber verallgemeinern für beliebige Punkte der Kreisscheibe. Wir brauchen nur (siehe Figur), x^2+y^2 durch r^2 und y durch t zu ersetzen, so streift man alles ab, was durch besondere Koordinatensysteme hereinkommt, und haben das Resultat:

Setzen wir die obige Grundlösung

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2R}$$

an, ~~wo wir der Konstanten den Wert $\frac{1}{2R}$ gegeben haben~~, dann gilt diese Gleichung entlang dem gezeichneten Kreise.

Wir haben also

$$\frac{2Ry}{x^2+y^2} - 1 = 0$$

oder $$\frac{2Ry - (x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

Bezeichnen wir nun den Abstand eines beliebigen Punktes der Kreisfläche von einem festen Punkte mit r, ferner den Abstand des beliebigen Punktes von

Die Tangente in dem festen Punkte mit t, dann ist

$$u = \frac{2Rt - r^2}{r^2}$$

eine Zweiglösung, welche erstlich in dem betreffenden Kreispunkte ihren Pol hat, und welche zweitens entlang unseres Kreises Null ist.

Um uns nun über das Weitere Klarheit zu verschaffen, führen wir in der XY Ebene Polarkoordinaten ein. Dann ist

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cdot \cos(\varphi - \psi),$$
$$t = R - \rho \cdot \cos(\varphi - \psi).$$

Setzen wir diese Werte in unsere Zweiglösung ein, so ist

$$u = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cdot \cos(\varphi - \psi)}.$$

Wenn wir diese Zweiglösung mit dem auf ein kleines Stück $d\psi$ des Kreises entfallenden Werte des Potentials $\Omega(\psi) \cdot d\psi$ multipliciren, darauf über diese einzelnen Stückchen $d\psi$ entlang dem Kreise summiren, und das Ganze schließlich noch

mit einer geeigneten Konstanten multipliziert, so läßt uns die Analogie vermuten, daß das so aufgebaute Integral

$$u = C \cdot \int_0^{2\pi} \Omega(\psi) \cdot d\psi \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \psi)}$$

gerade diejenige Lösung u sein möchte, die am Rande die Werte $\Omega(\psi)$ annimmt, sofern wir das C richtig wählen.

Dies Integral ist in der Tat die richtige Lösung, wenn wir $C = \frac{1}{2\pi}$ setzen; diesen ganzen berühmten Ansatz

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(\psi) \cdot d\psi \, \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2\rho \cdot R \cos(\varphi - \psi)}$$

nennt man nach seinem Erfinder das Poissonsche Integral.

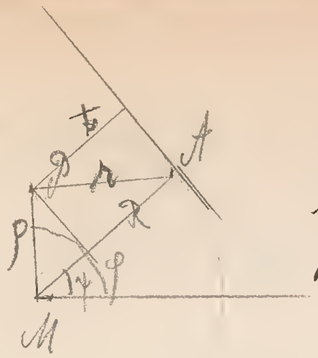
„Bezeichnet man die Entfernung eines beliebigen Punktes P in der Ebene von einem festen Punkte A der Kreisperipherie mit r und den Abstand jenes beliebigen Punktes P von der in dem festen Punkte A konstruierten Kreistangente mit t, dann ist

$$u = \frac{2Rt}{r^2} - 1$$

eine auf den Peripheriepunkt A bezügliche Hauptlösung; und zwar hat sie die Eigenschaft Null zu werden, sobald der bewegliche Punkt P auf die Kreisperipherie rückt, außer in dem festen Punkte A selbst, wo sie unendlich groß oder auch in einer hier nicht näher zu erläuternden Weise unbestimmt wird."

Mittels der so hergestellten Hauptlösungen ist es nun nicht schwer, die Randwertaufgabe für den Kreis zu lösen. Wir wollen nur die Hauptlösungen noch ein wenig anders schreiben.

Den beweglichen Punkt P, den „Aufpunkt" mögen wir in der Ebene durch die auf den Mittelpunkt des Kreises bezogenen Polarkoordinaten ρ und φ bezeichnen, so wie wir vorhin schon die Peripheriepunkte A durch R und ψ charakterisierten. Alsdann erhalten wir den



Figur die beiden Relationen

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi)$$

$$t = R - \rho\cdot\cos(\varphi-\psi)$$

Fügen wir diese in die Grundlösung ein, so folgt

$$u = \frac{2Rt - r^2}{r^2} = \frac{2R^2 - 2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi) - R^2 - \rho^2 + 2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi)}$$

oder

$$u = \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi)}$$

Und nun wird die Randwertaufgabe folgendermaßen gelöst:
Für jede Stelle ψ der Kreisperipherie setzen wir die Grundlösung an

$$u = \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi)}\,\Omega(\psi)\cdot d\psi$$

und integrieren darauf über die ganze Peripherie. Wir behaupten, der so entstehende Ausdruck, wenn wir ihn noch mit dem

Faktor $\frac{1}{2\pi}$ vorsetzen, stellt die Lösung der vorhin formulierten Randwertaufgabe dar:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\psi)} \cdot \Omega(\psi) \cdot d\psi;$$

Diese Formel wird als das „Poissonsche Integral" bezeichnet, weil es Poisson durch sie zum ersten Male gelang, jene Randwertaufgabe in geschlossener Form zu lösen.

Vermöge einer kleinen geometrischen Umformung, welche von Schwarz herrührt, lässt sich das Poissonsche Integral in eine Gestalt bringen, welche es dem inneren Verständnis wesentlich näher bringt.
Wir wollen die Verbindungslinie AP verlängern bis zu dem anderen Schnittpunkt B mit der Kreisperipherie und wollen nun zusehen, wie der so bestimmte „Bildpunkt" B, den wir über den Umkrei-

winkel χ zu=teilen, sich bewegt, wenn A bei Festhaltung des Aufpunktes P auf der Kreisbahn herumläuft.

Zu dem Zwecke untersuchen wir eine Verschiebung des A um den Centriwinkel dψ, der eine Verrückung des B um dχ entspricht. Dann können wir der nebenstehenden Figur, indem wir die eingetragenen Bezeichnungen benutzen, sofort folgende Relationen entnehmen:

$$R \cdot d\chi \cdot \cos\alpha = s \cdot d\beta$$

$$R \cdot d\psi \cdot \cos\alpha = r \cdot d\beta,$$

woraus durch Division folgt

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{s}{r}.$$

Andererseits ist nach dem Sehnenschnitt=

zunächst ist:

$$s \cdot r = (R+\rho)(R-\rho),$$

also ergiebt sich durch Elimination von s

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{(R+\rho)(R-\rho)}{r^2}$$

oder

$$d\chi = \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cdot\cos(\varphi-\psi)}\cdot d\psi$$

Durch Einführung dieses $d\chi$ in die obige Poissonsche Formel erhalten wir daher

$$u = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}\Omega(\psi)\cdot d\chi.$$

Mittels dieser einfachen Darstellung gewinnen wir nun für das Poissonsche Integral die folgende Interpretation:

„Nachdem wir einen bestimmten Aufpunkt P gewählt haben, verpflanzen wir den an einer Stelle ursprünglich gegebenen Funktionswert $\Omega(\psi)$ auf den zugehörigen Bildpunkt B und tun dies für jeden Punkt unserer Kreisperi-

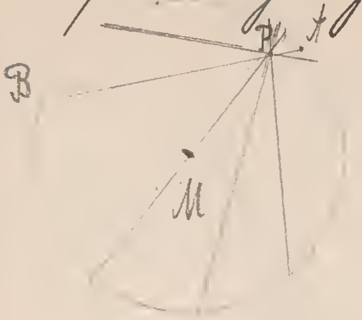
pherie. Dann stellt für die so aufgefundene Wertverteilung auf dem Kreise unser u einfach das arithmetische Mittel dar! denn so wird man doch diesen Prozeß bezeichnen, welcher an jeder Stelle B der Kreisperipherie die dort hingetragenen Werte $R(\psi)$ mit dem Winkelelement $d\psi$ multipliziert, alle diese Elemente summiert und hernach durch die Summe aller dieser Winkelelemente selbst

$$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi$$

dividiert."

Diese Interpretation gestattet nun in besonders schöner Weise zu verifizieren, daß die gefundenen Lösungen u wirklich an jeder Stelle $A_0(R_0, \psi_0)$ der Kreisperipherie den zu Anfang vorgeschriebenen Wert $R(\psi_0)$ annimmt.

Stellen wir uns nämlich vor, P rücke sehr nahe an den Punkt A_0 der Peripherie heran, so wird sich die oben geschilderte Vergrößerung der Funktionswerte $R(\psi)$ so vollziehen,



daß die ganz in der Nähe von A_0 gelegenen Werte $\mathfrak{L}(\psi)$ sich über den bei weitem größten Teil der Kreisfläche ausbreiten, die übrigen vorhandenen $\mathfrak{L}(\psi)$ dagegen in die nächste Umgebung von A_0 verdrängt werden. Nun unterscheiden sich die ursprünglich in der Umgebung von A_0 liegenden $\mathfrak{L}$-Werte, sofern wir $\mathfrak{L}(\psi)$ als stetige Funktion voraussetzen wollen, sehr wenig von dem an der Stelle A_0 selbst vorhandenen $\mathfrak{L}(\psi_0)$. Nach Ausführung der Verzerrung haben wir daher das Bild, daß jetzt fast die ganze Kreisfläche des Kreises mit Werten belegt ist, die sich nur unendlich wenig von $\mathfrak{L}(\psi_0)$ unterscheiden. Nur auf einem kleinen Stück der Kreisfläche bei A_0 werden wir einigermaßen abweichende Werte $\mathfrak{L}$ bekommen. Bilden wir nun, wie es vorgeschrieben ist, das arithmetische Mittel für die neue Werteverteilung, so wäre dasselbe genau gleich $\mathfrak{L}(\psi_0)$, falls an allen Stellen der Kreisfläche genau der Wert $\mathfrak{L}(\psi_0)$

vorhanden wäre. u muß also wenigstens annähernd gleich $R(\psi_0)$ sein, der in Wirklichkeit für den größten Teil der Zwischenstrecken vorgeschrieben sind, die sich ganz wenig von $R(\psi_0)$ unterscheiden. Dabei erkennt man, daß der Mittelwert um so mehr sich dem $R(\psi_0)$ nähern wird, je näher der Aufpunkt P an die Kreisperipherie bei A_0 heranrückt, und folglich erhalten wir nun

$$\lim P = A_0$$

in der Tat den richtigen zu Anfang vorgeschriebenen Randwert $R(\psi_0)$.

Wenden wir uns nunmehr der Methode der trigonometrischen Ansätze zu. Um die Differentialgleichung des ebenen Potentials

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

partikulär zu integrieren, machen wir den trigonometrischen Ansatz

$$u = \left.\begin{matrix}\cos \lambda x \\ \sin \lambda x\end{matrix}\right\} \cdot f(y)$$

und finden daraus für $f(y)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f''(y) - \lambda^2 \cdot f(y) = 0,$$

welche bekanntermaßen die Partikularlösungen hat

$$f(y) = e^{\lambda y} \qquad f(y) = e^{-\lambda y}$$

Wir bevorzugen die letzteren, da sie für unbegrenzt wachsendes y nach 0 konvergieren, und betrachten also jetzt die Partikularlösung

$$u = \left.\begin{matrix}\cos \lambda x\\ \sin \lambda x\end{matrix}\right\} e^{-\lambda y}$$

worin λ eine willkürliche Konstante bedeutet.

Aus solchen Partikularlösungen können wir durch Superposition sofort viel allgemeinere Lösungen bilden,

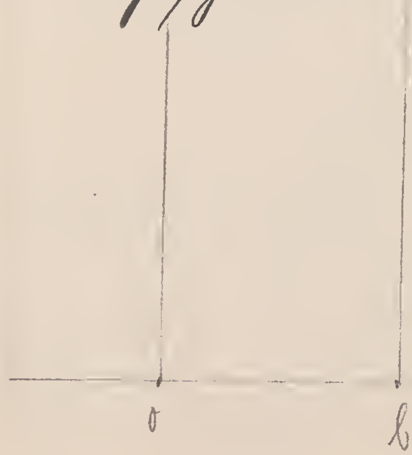
$$u = \sum_\lambda \left[A_\lambda \cdot \cos \lambda x + B_\lambda \cdot \sin \lambda x\right] \cdot e^{-\lambda y}$$

Nehmen wir als Beispiel die Randwertaufgabe für den Vertikalstreifen.

Auf den Vertikalen $x = 0$ und $x = l$ sei überall $u = 0$ und im Intervalle von 0 bis l der X Achse seien willkürlich die Werte

$$(u)_{y=0} = \Phi(x)$$

vorgeschrieben.



Dann ist die Lösung einfach diese.

Damit die Funktion u bei $x = 0$ verschwindet, dürfen wir nur Sinusglieder nehmen. Damit sie auch bei $x = l$ verschwindet, muß

$$\sin \lambda l = 0,$$

d. h. λl ein Multiplum von π

sein, so daß wir erhalten

$$u = \sum_1^\infty B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot e^{-\frac{n\pi y}{l}},$$

wo $n = 1, 2, 3 \ldots \infty$ ist.

Um endlich der letzten Randbedingung zu genügen, müssen wir setzen

$$(u)_{y=0} = \sum_1^\infty B_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} = \Phi(x).$$

Betrachten wir ferner noch einmal die Randwertaufgabe für die Kreisscheibe.

Hier werden die Partikularlösungen der Periodizität in ψ Rechnung tragen müssen. Dies tun, so betrachten wir die Funktionen

$$u = r^n \cdot \begin{cases} \cos n\psi \\ \sin n\psi \end{cases},$$

wo n eine ganze Zahl bedeuten soll. √x

Aus diesen Partikularlösungen setzen wir mit Hülfe der Konstanten A_n und B_n die allgemeine Lösung zusammen

$$u = \sum_n r^n (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi)$$

und bestimmen dann die Koeffizienten aus der Randbedingung

$$\sum_n R^n (A_n \cdot \cos n\psi + B_n \cdot \sin n\psi) = \mathfrak{F}(\psi)$$

Oben (cfr pg. 265) haben wir die Randwertaufgabe für die Kugel mit Kugelfunktionen gelöst, wobei sich ein diesem letzten ganz analoger Ansatz ergab.

√x Daß diese Ausdrücke wirklich Lösungen der Potentialgleichung sind, erkennen wir sofort daraus, daß sie Real- und Imaginärteil einer Funktion von $(x+iy)$ sind, denn es ist

$$r^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = [r(\cos\psi + i \sin\psi)]^n = (x+iy)^n.$$

Zum Schluß wollen wir noch die Beziehung betrachten, welche zwischen den Potenzreihen der Funktionentheorie und unseren jetzt gewonnenen trigonometrischen Reihen besteht.

In der Funktionentheorie ist es eine fundamentale Aufgabe, eine Funktion $f(z) = f(x+iy)$ wenn sie irgend wie gegeben ist, in der Umgebung einer Stelle in eine Potenzreihe zu entwickeln, sagen wir etwa in der Umgebung des Nullpunktes

$$f(z) = \sum_n \gamma_n \cdot z^n$$

Hierin werden im allgemeinen, die Koeffizienten γ_n komplexe Zahlen sein, $\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n$. Eine solche Entwicklung geschieht nach dem Taylorschen Satz.

Deuten wir nun die Variable $z = x+iy$ als Punkt (x,y) in der Ebene und gehen zu Polarkoordinaten

$$x = r\cdot\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi$$

über, dann schreibt sich unsere Potenzreihe so:

$$f(z) = \sum_n \gamma_n \cdot r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_n (\alpha_n + i\beta_n)\cdot r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$= \sum_n r^n(\alpha_n\cdot\cos n\varphi - \beta_n\cdot\sin n\varphi) + i\sum_n r^n(\beta_n\cdot\cos n\varphi + \alpha_n\cdot\sin n\varphi)$$

Hieraus entnehmen wir den Satz:

„Der Realteil und Imaginärteil einer komplexen Potenzreihe stellen sich auf einem beliebigen Kreise um den Entwicklungspunkt betrachtet, je als eine trigonometrische Reihe dar, und zwar sind es gerade solche trigonometrische Reihen, wie wir sie soeben bei der Randwertaufgabe für den Kreis kennen gelernt haben."

Auf diese Weise treten also die beiden wichtigsten Reihenarten der Analysis in einen inneren Zusammenhang.

Wir verlassen hiermit die partiellen Differential-gleichungen der Physik und gehen über zu den

partiellen Differentialgleich. der Geometrie.

Wir betrachten die Differentialgleichungen der Krümmungstheorie.

Gegeben ist eine Fläche

$$z = f(x, y),$$

die wir von dem Punkte (x_0, y_0, z_0) nach Taylor entwickeln, indem wir

$$x - x_0 = \xi, \quad y - y_0 = \eta, \quad z - z_0 = \zeta$$

setzen und für

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \text{ u. s. w.}$$

schreiben.

Es heisst dann

$$\zeta = p \cdot \xi + q \cdot \eta + \frac{1}{2}(r\xi^2 + 2s \cdot \xi\eta + t\eta^2) + \cdots$$

Errichten wir im Punkte (x_0, y_0, z_0) die Normale auf unserer Fläche, so hat diese die Gleichung

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{-1}$$

Ein auf der Normalen festgelegter Punkt ist dann bestimmt durch die Koordinaten $(\lambda p, \lambda q, -\lambda)$

Wenn wir um diesen Punkt die Kugel beschreiben, so ist deren Gleichung

$$(\xi-\lambda p)^2+(\eta-\lambda q)^2+(\zeta+\lambda)^2=\rho^2.$$

Ferner ist aber auch, wenn die Kugel die Fläche berührt,

$\rho^2 = \lambda^2(p^2+q^2+1)$, da ja im Berührungspunkt $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$ ist, so dass sich durch Subtraktion als Gleichung der Kugel ergibt

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\lambda p\xi-2\lambda q\eta+2\lambda\zeta=0,$$

woraus sich ergibt

$$\zeta = p\xi+q\eta-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2\lambda},$$

oder wenn wir für das im dritten Term noch vorkommende ζ direkt ~~dafür~~ den durch die letzte Gleichung bestimmten Wert einsetzen, so erhalten wir unter Fortlassung von Gliedern höherer Ordnung für die berührende Kugel die Taylorsche Entwicklung in der Form

$$\zeta = p\xi + q\eta - \frac{\xi^2 + \eta^2 + (p\xi + q\eta)^2}{2a} + \cdots$$

Wenn wir aus dieser Gleichung das ζ eliminieren, so bekommen wir die Projektion der Kurve, in der unsere Fläche von der berührenden Kugel geschnitten wird, auf die (ξ, η) Ebene.

Um ζ zu eliminieren, subtrahiere ich die letzte Gleichung von der früheren Gleichung

$$\zeta = p\xi + q\eta + \tfrac{1}{2}(r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2) + \cdots,$$

und erhalte so

$$0 = \tfrac{1}{2}(r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2) + \frac{\xi^2 + \eta^2 + (p\xi + q\eta)^2}{2a} + \cdots$$

oder

$$0 = a(r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2) + \xi^2 + \eta^2 + p^2\xi^2 + 2pq\xi\eta + q^2\eta^2 + \cdots,$$

die wir auch schreiben können

$$0 = (a r + 1 + p^2)\xi^2 + 2(sa + pq)\xi\eta + (a t + 1 + q^2)\eta^2 + \cdots$$

Da die Gleichung nur Glieder zweiten Grades enthält, so besitzt unsere Kurve im Punkte (ξ, η, ζ) einen <u>Doppelpunkt</u>.

Die Tangente im Doppelpunkt unserer Projektionskurve bekommen wir, wenn wir die

Gleichung nach $\frac{\xi}{\eta}$ auflösen.
Unter den unendlich vielen Berührungskugeln suchen wir nun diejenigen, welche unsere Fläche in einer Curve mit Spitze schneiden, für die also die obige quadratische Gleichung 2 gleiche Wurzeln hat.
Solche Berührungskugeln nennen wir Hauptkugeln.

Damit die Fläche von der Kugel in einer Curve mit Spitze geschnitten wird, muß aber sein

$$0 = (\lambda s + p \cdot q)^2 - (\lambda r + 1 + p^2)(\lambda t + 1 + q^2)$$

(cfr. Klein: Differential- u. Integralrechnung II pg. 156–166)

Hieraus ergeben sich 2 Werte für λ und wir kommen somit zu dem Satze:
„In dem Büschel der Berührungskugeln giebt es zwei Hauptkugeln."

Versuchen wir nun den Radius ρ der Hauptkugeln zu berechnen.
Es folgt aus unserer letzten Gleichung

$$0 = (s^2 - r \cdot t) \cdot \lambda^2 - \lambda\left[(1+q^2) r - 2 p q s + (1+p^2) \cdot t\right] - (1 + p^2 + q^2)$$

Andererseits ist aber

$$\rho = \lambda(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}},$$

wenn wir dies in die vorige Gleichung einsetzen, so ergibt sich

$$0 = (s^2-rt)\cdot\rho^2 - (p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}}\left[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\right]\cdot\rho - (1+p^2+q^2)^2.$$

oder

$$\rho^2 - \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{s^2-rt}\left[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)\cdot t\right]\cdot\rho - \frac{(1+p^2+q^2)^2}{s^2-rt} = 0$$

Diese quadratische Gleichung für ρ hat zwei Wurzeln ρ_1 und ρ_2 und es ist offenbar

$$\rho_1+\rho_2 = +\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{s^2-rt}\left[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)\cdot t\right]$$

und

$$\rho_1\cdot\rho_2 = \frac{1+p^2+q^2}{s^2-rt}.$$

Wir wollen nun weiter betrachten folgende beiden Fälle:

1.) $\rho_1+\rho_2 = 0$, also $\left[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\right] = 0$.*

Das sind die <u>Minimalflächen</u>, wie wir definieren.

* da nur dieser Faktor verschwinden kann.

2.) $\rho_1 \cdot \rho_2 = C$,

die Konstante setzen wir speziell gleich $\pm a^2$ und haben so die Flächen

$$\frac{1+p^2+q^2}{s^2-rt} = \pm a^2,$$

die sog. Flächen von konstantem Krümmungsmaß. Und zwar sind die Flächen

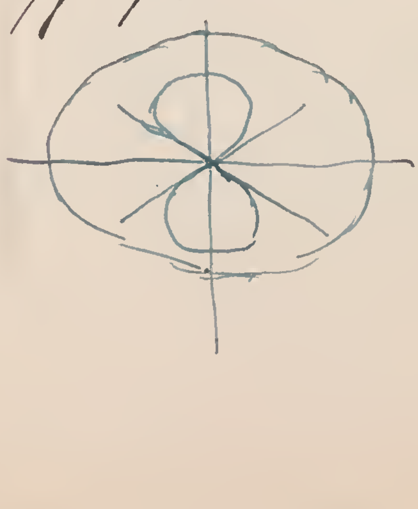
$$\frac{1+p^2+q^2}{s^2-rt} = +a^2,$$

Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß, während die Flächen

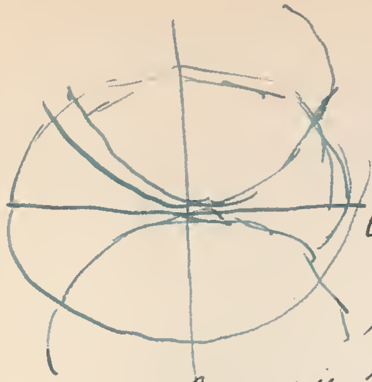
$$\frac{1+p^2+q^2}{s^2-rt} = -a^2,$$

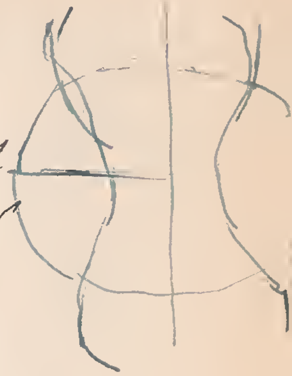
die Flächen von konstantem positivem Krümmungsmaß.

Wir wollen den Scheitelpunkt eines elliptischen Paraboloids ins Auge fassen und denken



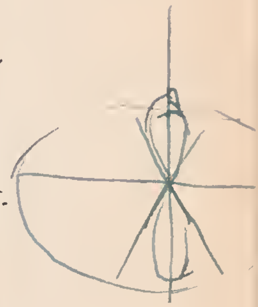
in ihm die berührenden Kugeln konstruiert, so schneiden diese Kugeln allgemein den Körper in einer Kurve mit Doppelpunkt im Scheitelpunkt.





Bei Vergrößerung des Radius schneidet unsere Kugel das Ellipsoid in einer Curve mit Selbstberührungspunkt, oder, was dasselbe ist, in einer Curve mit Spitze, wir haben also eine Grenzkugel.

Verkleinern wir andererseits den Kugelradius, so zieht sich die schleifenartige Curve allmählich zusammen und geht in der Grenze in einen isolierten doppelt zählenden Punkt über.



Wir haben uns dann vorzustellen, daß in diesem isolierten Doppelpunkte sich zwei imaginäre Äste der Schnittcurven berühren. und somit haben wir in diesem Grenzfall die andere Grenzkugel.

Betrachten wir nun einige Beispiele:

Zunächst die Minimalflächen.

1). Als erstes Beispiel haben wir die Schraubenfläche (Wendeltreppe)

$$z = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Wenn wir uns hier die einzelnen Differentialquotienten wirklich bilden, so haben wir, wenn wir noch im einfachsten Falle k gleich 1 setzen

$$p = \frac{-y}{x^2+y^2}\;,\quad q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$r = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\;,\quad t = \frac{-2xy}{x^2+y^2}\;,\quad s = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Dies befriedigt in der Tat die Gleichung

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

wie man durch Einsetzen findet.

Diese Schraubenfläche ist ein Beispiel für eine Minimalfläche.

Der Ausdruck Minimalfläche erklärt sich folgendermaßen:

Schneiden wir ein beliebig begrenztes Stück der Schraubenfläche heraus, so ist die Schraubenfläche von allen unendlich vielen Flächen, die sich in die gegebene Kontur hineinspannen lassen, diejenige kleinsten Inhalts.

(Der exakte Beweis dafür, daß dies wirklich der Fall ist, kann hier nicht gegeben werden.)

2.) Als weiteres Beispiel für die ~~Rotations~~ Minimal flächen betrachten wir die ~~Fläche~~ ~~z~~ Rotationsfläche

$$z = \chi(\rho)$$

wo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \rho \cdot \cos\omega$, $y = \rho \cdot \sin\omega$ sind.

Wenn ich mit

$$\chi' = \frac{\partial \chi}{\partial \rho}, \quad \chi'' = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2}$$

bezeichne, so ist

$$p = \chi' \cdot \frac{x}{\rho}, \quad q = \chi' \cdot \frac{y}{\rho},$$

$$r = \chi'' \frac{x^2}{\rho^2} + \chi' \cdot \frac{y^2}{\rho^3}$$

$$s = \chi'' \cdot \frac{xy}{\rho^2} - \chi' \frac{xy}{\rho^3}$$

$$t = \chi'' \frac{y^2}{\rho^2} + \chi' \cdot \frac{x^2}{\rho^3},$$

wenn ich diese Werte in die Gleichung

$$(1+q^2) \cdot r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

einsetze, so ist

$$0 = \chi'' + \frac{\chi' + \chi'^3}{\rho}$$

die Gleichung der Minimalfläche.

Aus der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist durch die Annahme, dass wir es

mit einem Ableitungsstriche zu bezeichnen, eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung geworden, die wir jetzt zu integrieren haben.

Da χ in der Differentialgleichung gar nicht vorkommt, so ~~haben~~ setzen wir

$$\chi' = \Omega,$$

und haben nun

$$0 = \Omega' + \frac{\Omega + \Omega^3}{\rho},$$

wo sich die Variabeln sofort separieren:

$$\frac{d\Omega}{\Omega + \Omega^3} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

oder wenn ich links in Partialbrüche zerlege

$$d\Omega\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{\Omega}{\Omega^2+1}\right) = -\frac{d\rho}{\rho}$$

wo die Integration nun sofort auszuführen ist und ergiebt

$$\log\Omega - \frac{1}{2}\log(\Omega^2+1) = -\log\rho + C,$$

oder wenn ich mit (-2) multipliziere und $C = \log a$ setze

$$\log(\Omega^2+1) - \log\Omega^2 = \log\rho^2 - \log a^2$$

Wenn ich nun von den Logarithmen zu den Zahlen übergehe, so erhalte ich Gleichung in der Form

$$\frac{\Omega^2+1}{\Omega^2} = \frac{\rho^2}{a^2}.$$

Zur weiteren Integration setze ich nun wieder

$$\Omega = \frac{dz}{d\rho}$$

und erhalte

$$\frac{dz^2 + d\rho^2}{dz^2} = 1 + \frac{d\rho^2}{dz^2} = \frac{\rho^2}{a^2},$$

wo sich die Variabeln wieder scheiden

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{a^2}$$

oder

$$dz = \frac{a \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}},$$

Also ergiebt sich durch Integration

$$z = \int \frac{a \cdot d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} + z_0$$

Will nun ich noch jeden Term durch a dividiren, so habe ich

$$\frac{z}{a} - \frac{z_0}{a} = \int \frac{\frac{d\rho}{a}}{\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 1}}.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man

$$\frac{z-z_0}{a} = \log\left(\frac{\rho}{a}+\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2}-1}\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{\rho}{a}+\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2}-1} = e^{\frac{z-z_0}{a}}.$$

und weiterhin ist

$$\frac{\rho}{a}-\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2}-1} = e^{-\frac{z-z_0}{a}},$$

so dass wir durch Addition erhalten

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z-z_0}{a}}+e^{-\frac{z-z_0}{a}}\right)$$

Dies ist die Gleichung eines Katenoids, desjenigen Rotationskörpers, der entsteht, wenn wir die Kettenlinien

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z-z_0}{a}}+e^{-\frac{z-z_0}{a}}\right)$$

um die z-Achse rotieren lassen.

Unter allen Rotationsflächen ist also das Katenoid die Minimalfläche.

— III. —

Weiterhin betrachten wir an einigen Beispielen noch die Flächen konstanten Krümmungsmasses.

Wir untersuchen wieder eine Rotationsfläche

$$z = \chi(\rho),$$

Hier sind

$$p = \chi' \cdot \frac{x}{\rho} \quad , \quad q = \chi' \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$r = \chi'' \frac{x^2}{\rho^2} + \chi' \cdot \frac{y^2}{\rho^3}, \quad s = \chi'' \cdot \frac{xy}{\rho^2} - \chi' \cdot \frac{xy}{\rho^3}$$

$$t = \chi'' \frac{y^2}{\rho^2} + \chi' \cdot \frac{x^2}{\rho^3}$$

Diese Werte haben wir einzusetzen in die Gleichung

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \mp a^2$$

oder

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{s^2 - r \cdot t} = \mp a^2$$

Es ist

$$s^2 - r \cdot t = -\frac{\chi'' \cdot \chi'}{\rho}$$

und

$$1+p^2+q^2 = 1+\chi'^2,$$

so daß wir die Gleichung haben

$$-\frac{(1+\chi'^2)^2 \rho}{\chi'' \chi'} = \mp a^2$$

oder

$$\frac{\chi' \cdot \chi''}{(1+\chi'^2)^2} = \frac{\rho}{\pm a^2}$$

Wir haben somit zur Bestimmung des χ diese gewöhnliche Differentialgleichung gefunden, die leicht integriert werden kann.

Man setzt

$$\chi' = \Omega(\rho)$$

und hat die Gleichung, die in Ω vom ersten Grade ist

$$\frac{\Omega \cdot \frac{d\Omega}{d\rho}}{(1+\Omega^2)^2} = \frac{\rho}{\pm a^2},$$

wo sich die Variabeln sofort separieren

$$\frac{\Omega \cdot d\Omega}{(1+\Omega^2)^2} = \frac{\rho \cdot d\rho}{\pm a^2}$$

Wenn ich noch mit (-2) erweitere

$$\frac{-2\Omega \cdot d\Omega}{(1+\Omega^2)^2} = \frac{2\rho \cdot d\rho}{\mp a^2},$$

so lässt sich die Integration durch Quadratur erledigen, es ergiebt sich

$$\frac{1}{1+\Omega^2} = \frac{\rho^2 - C}{\mp a^2}.$$

Um die Integration weiter durchzuführen, setzen wir für Ω wieder seinen Wert ein

$$\Omega = \frac{dz}{d\rho},$$

so daß unsere Gleichung heißt

$$\frac{1}{\frac{dz^2}{d\rho^2}+1} = \frac{\rho^2 - C}{\mp a^2}$$

oder

$$\frac{dz^2}{d\rho^2} = \frac{\mp a^2}{\rho^2 - C} - 1,$$

wo sich die Variabeln wieder separiren.

$$dz = d\rho\sqrt{\frac{\mp a^2 - \rho^2 + C}{\rho^2 - C}},$$

so daß sich die Integration durch Quadratur erledigt

$$z = \int d\rho\sqrt{\frac{\mp a^2 - \rho^2 + C}{\rho^2 - C}} + C'$$

z stellt sich also dar durch ein nach ρ gebildetes elliptisches Integral.

Wir betrachten zunächst den Fall der constanten positiven Krümmung.

Hierfür haben wir die Gleichung gefunden

$$\frac{1}{\Omega^2 + 1} = \frac{C - \rho^2}{a^2}$$

wo wir C positiv wählen müssen und $C = \rho_0^2$ setzen wollen, so daß wir haben

$$\frac{1}{\Omega^2+1} = \frac{\rho_0^2-\rho^2}{a^2}$$

Hieraus geht zunächst hervor, daß ρ^2 zwischen den Grenzen 0 und ρ_0^2 liegen muß

$$0 \leq \rho^2 \leq \rho_0^2$$

Aus der Gleichung

$$z = \int d\rho \cdot \sqrt{\frac{\rho^2-(\rho_0^2-a^2)}{\rho_0^2-\rho^2}}$$

folgt weiter

$$\rho^2 \geq \rho_0^2 - a^2$$

Im Falle

$$\rho^2 = \rho_0^2 - a^2$$

ist

$$\frac{dz}{d\rho} = 0,$$

wir haben also eine horizontale Tangente.

Erreicht andererseits ρ^2 seinen größten Wert $\rho^2 = \rho_0^2$

so ist $\frac{dz}{d\rho} = \infty$,

wir haben also eine vertikale Tangente.

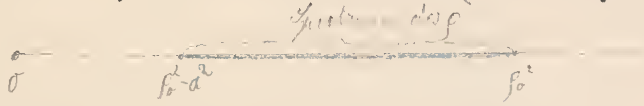
In dem Falle

$$\rho_0^2 - a^2 < \rho^2 < \rho_0^2$$

haben wir drei Unterfälle zu unterscheiden.

1.) Es ist $\rho_0^2 > a^2$

die Differenz $\rho_0^2 - a^2$ wird dann einen Punkt auf der positiven Seite festlegen



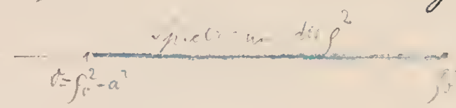
der Spielraum des ρ^2 liegt zwischen den Punkten $(\rho_0^2 - a^2)$ und ρ_0^2.

2.) Es ist $\rho_0^2 < a^2$,

die Differenz $\rho_0^2 - a^2$ legt dann einen Punkt auf der negativen Seite fest. Da aber ρ^2 stets größer

als Null sein muß, so liegt sein Spielraum zwischen 0 und ρ_0^2.

3.) Es ist
$$\rho_0^2 = a^2.$$
Es ist also $\rho_0^2 - a^2 = 0$, der Spielraum des ρ^2

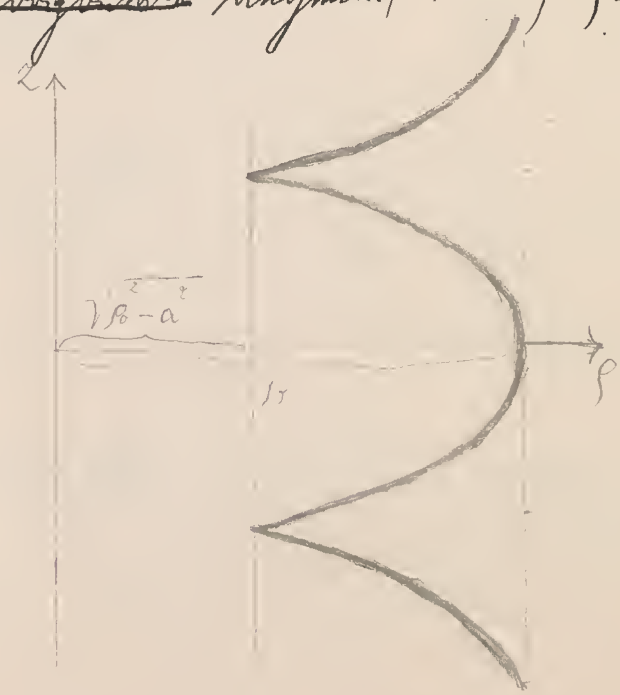


liegt also zwischen 0 oder auch $(\rho_0^2-a^2)$ und ρ_0^2

Nach diesen vorbereitenden Diskussionen können wir nun an die Konstruktion der Meridiankurve herangehen.

1.) $\rho_0^2 > a^2$

Im $(Z\rho)$ Systeme hat die Kurve bei $\rho^2=\rho_0^2$ einen ~~horizontalen~~ vertikalen Wendepunkt, bei $\rho^2=\rho_0^2-a^2$ einen horizontalen Wendepunkt

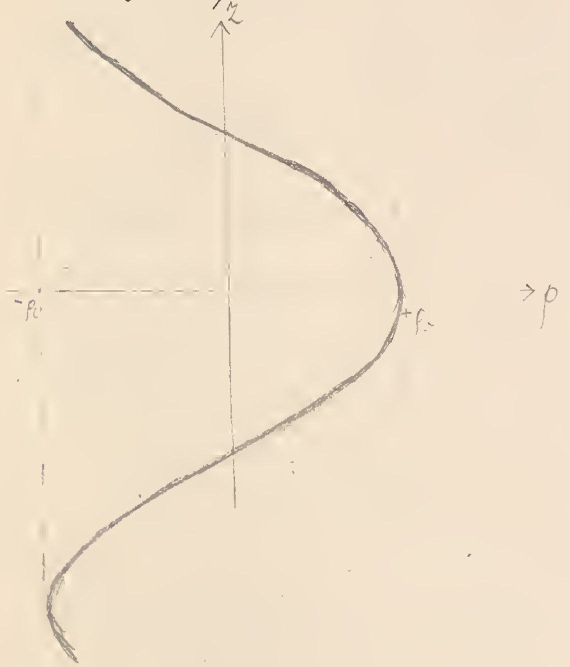


die Meridiankurve hat im übrigen eine Gestalt ähnlich einer gemeinen Cykloide, welche also ebenfalls die gerade Linie $\rho=\rho_0$ berührt und auf

der geraden Linie $\rho = \sqrt{\rho_0^2 - a^2}$ mit Spitzen aufsetzt.

Wir nennen diesen Typus den „Ringtypus.“

2.) Es ist $\rho_0^2 < a^2$.



In diesem Falle ergiebt sich für die Meridiancurven eine Gestalt etwa vom Typ einer Sinuslinie, welche so hin und her oscilliert, dass sie die beiden Geraden $\rho = +\rho_0$ und $\rho = -\rho_0$ abwechselnd berührt.

Lassen wir diese Meridiancurven um die Z-Achse rotieren, so ~~ist~~ entsteht eine Fläche vom „Spindeltypus.

3.) Es ist $\rho_0^2 = a^2$

Hier erhalten wir als $\mathfrak{F}$ die gesuchten Flächen

Kugeln vom Radius
$\rho_0 = a$.
Es ist ja in diesem
Falle

$$z = \int \frac{\rho \cdot d\rho}{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2}},$$

also

$$z = -\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2}$$

oder

$$z^2 + \rho^2 = \rho_0^2$$

und da

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$ ist,

so haben wir in der That die Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2 = a^2.$$

Hier reden wir vom „Kugeltypus".

Diese 3 Flächentypen sind isometrische d.h. Eine biegsame Membran, welche auf einer unserer Flächen aufgepaßt, kann so gebogen wer=

den ohne Veränderung der inneren Maßverhältnisse, also ohne daß sich die Entfernungen und die Winkel ändern, daß sie z.B. auf unsere Kugel vom Radius a aufgelegt werden kann.

Bei dieser „Abbildung" einer unserer beiden ersten Flächen auf die Kugel gehen über

Meridiane in Meridiane

Breitenkreise in Breitenkreise

der Äquator in den Aequator.

Um für die Beschreibung unserer Flächen einen symmetrisch zur Kugel vom Radius a führen wir ρ und ω als Koordinaten auf der Fläche ein.

Ich berechne nun das Bogenelement ds, d.h. dasjenige ~~Kurve~~ Bogenstück, das beschrieben wird, wenn ich z um dz, ρ um $d\rho$, ω um $d\omega$ ändere.

Es ist dann

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 \cdot d\omega^2$$

(cfr. pg: 152–153.)

und da

$$dz^2 = d\rho^2 \cdot \frac{\rho^2 + a^2 - \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho^2}$$

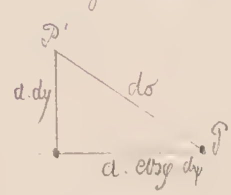
ist, so nimmt die Formel für ds die Gestalt an

$$ds^2 = \frac{a^2 \cdot d\rho^2}{\rho_0^2 - \rho^2} + \rho^2 \cdot d\omega^2$$

oder

$$ds = \sqrt{\frac{a^2 \cdot d\rho^2}{\rho_0^2 - \rho^2} + \rho^2 \cdot d\omega^2}$$

Auf unserer Kugel vom Radius a legen wir einen Kugelpunkt P fest, durch die Breite φ und die Länge ψ.



Jetzt ändern wir ψ um $d\psi$, φ um $d\varphi$ und legen dadurch einen neuen Kugelpunkt P' fest, die Strecke PP' ist das Linienelement $d\sigma$, das wir suchen.

Aus dem besonders herausgezeichneten rechtwinkligen Dreieck ergibt sich dann

$$d\sigma^2 = a^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi \cdot d\psi^2)$$

Wenn ich nun unsere Fläche und die Kugel auf einander abbilden will, so geschieht dies durch die Formeln

$$\varphi = \arc \cos \frac{\rho}{\rho_0}$$
$$\psi = \frac{\rho_0}{a} \cdot w.$$

Es ist also
$$d\varphi = -\frac{\frac{d\rho}{\rho_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}}$$
und
$$d\psi = \frac{\rho_0}{a} \cdot dw$$

Wenn ich dies in die Formel für $d\sigma^2$ einsetze, so wird direkt
$$d\sigma^2 = a^2 \cdot \frac{d\rho^2}{\rho_0^2 - \rho^2} + \rho^2 \cdot dw^2 = ds^2.$$

$d\sigma = ds$ war ja aber gerade die (Definition für die) isometrische Beziehung zweier Flächen, also sind wirklich die Flächen mit der Kugel vom Radius a isometrisch, w. z. b. w.

Den *größten Kreisen* auf unserer Kugel entsprechen auf den isometrischen Flächen *geodätische Linien*. Den *sphärischen Dreiecken* der Kugeloberfläche entsprechen *geodätische Dreiecke* auf den isometrischen Flächen.

Daß die besprochene Abbildung auch in der Tat

unverändert ist, sieht man aus folgender Überlegung: Die ganz kleinen Dreiecke, die wir in der Grenze als eben ansehen können, sind durch die gegebenen Seiten die Winkel bestimmt. Bei der Abbildung bleiben die Seiten unverändert, da das Dreieck wegen seiner Kleinheit auch nach der Abbildung als eben angesehen werden kann, so bleiben die Winkel, die durch dieselben Seiten bestimmt werden, natürlich unverändert.

Durch Verfolg dieser Betrachtung ergiebt sich, dass für die geodätischen Dreiecke unserer Fläche genau so die sphärische Trigonometrie gilt, wie für die entsprechenden sphärischen Dreiecke auf der Kugel.

Als Beispiel erwähnen wir nun den Satz über den Inhalt eines sphärischen Dreiecks. Dieser ist bekanntlich

$$J = a^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

wo $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ der sphärische Exzess ist.

Sind nun α, β, γ die Winkel in einem ~~sphäri-~~ geodäti-schen Dreieck auf unserer Fläche, dann wird der Flächeninhalt unseres Dreiecks ausgedrückt

werden, aber durch diese Formel

$$J = a^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi).$$

i. ff.

Genau so, wie man ein sphärisches Dreieck auf ∞^3 Weise über die Kugel hinbewegen kann, genau so wird ~~man~~ auf unserer Fläche ein geodätisches Dreieck auf ∞^3 Weise verschieben können, ohne dass die Seiten und Winkel sich ändern. [Die Gestalt wird sich natürlich gewaltig deformieren.] „Jede beliebige Figur unserer Fläche lässt sich an jeder beliebigen Stelle unserer Fläche unter beliebigem Azimuth aufsetzen und passt immer genau," dies ist das Theorem in seiner allgemeinsten Fassung.

i. ff.

Wir wollen jetzt noch kurz die hier betrachteten Probleme auch bei den Flächen konstanter negativer Krümmung untersuchen, wo sie uns in neuer, interessanter Fassung entgegentreten werden.

Selbst wir werden

$$\frac{dz}{d\rho} = \Omega$$

setzen, so gilt für die Flächen constanter negativer Krümmung die Gleichung:

$$1 + \Omega^2 = \frac{\rho^2 - C}{a^2}$$

Da sowohl $1+\Omega^2$, wie a^2 positiv sind, so muss auch $\rho^2 - C$ positiv sein, d.h.

$$\rho^2 > C.$$

Es sind wieder die drei Fälle möglich, dass C positiv, negativ oder Null ist.
Als obere Grenze für das ρ folgt weiter aus der Formel

$$z = \int d\rho \sqrt{\frac{C + a^2 - \rho^2}{\rho^2 - C}}$$

$$\rho^2 \leqq C + a^2.$$

Da weiterhin $\rho^2 \geqq 0$ sein muß, so ist nun in allen drei möglichen Fällen der Spielraum des ρ^2 festgelegt.

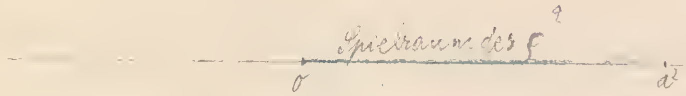
1) $C > 0$.

der Spielraum des ρ^2 reicht von C bis $(C + a^2)$

2.) $C < 0$.

Hier läuft das ρ^2 von 0 bis $(C + a^2)$

3.) $C = 0$.



Hier haben wir ρ^2 im Intervall von C oder 0 bis a^2 zu wählen.

Erreicht ρ^2 den höchsten Wert $(C+a^2)$, so wird

$$\frac{dz}{d\rho} = 0,$$

wir haben eine horizontale Tangente und zugleich eine Spitze der Meridiankurve.

Wird $\rho^2 = C$, was nur im Falle 1 und 3 eintreten kann, so haben wir

$$\frac{dz}{d\rho} = \infty$$

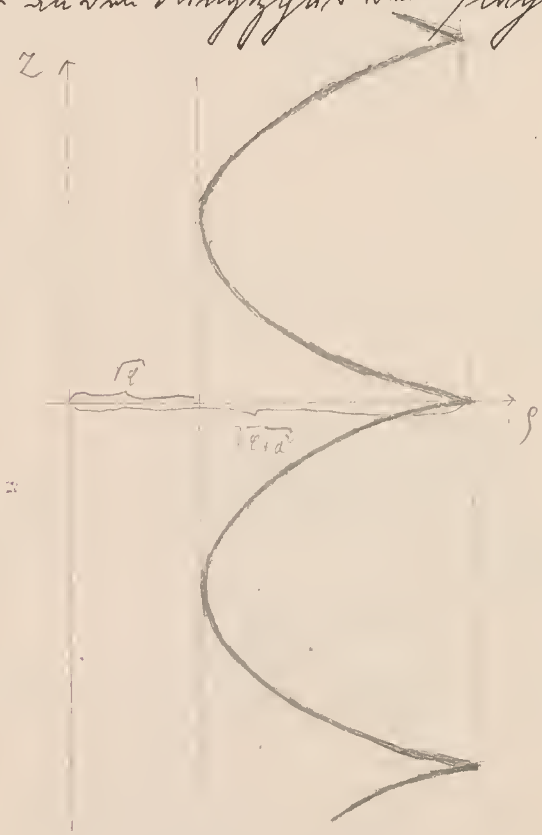
also eine vertikale Tangente.

Im Falle 3) haben wir unter dem Integral für $\rho = C = 0$ ein unvermeidbares Unendlich, weil hier das z selbst unendlich wird.

Nach diesen vorbereitenden Diskussionen ist es wieder nicht schwer, die Meridiankurven selbst zu zeichnen.

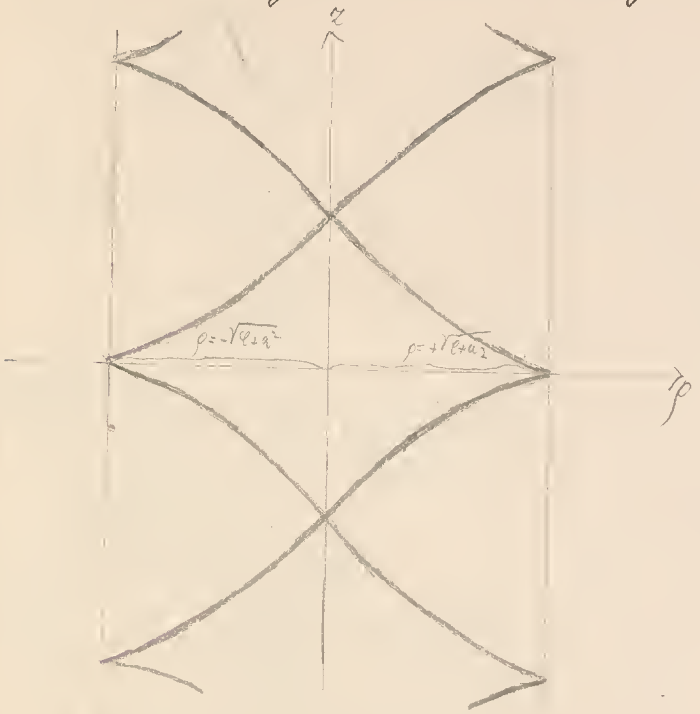
1) ~~f~~ $C > 0$.

In diesem Falle hat die Meridiankurven eine Gestalt, die an den Durchschnitt der Flächen konstanter positiver Krümmung erinnert, nur dass die ~~Fl~~ Meridiankurven die Konkave statt der konvexen Seite nach außen kehrt.



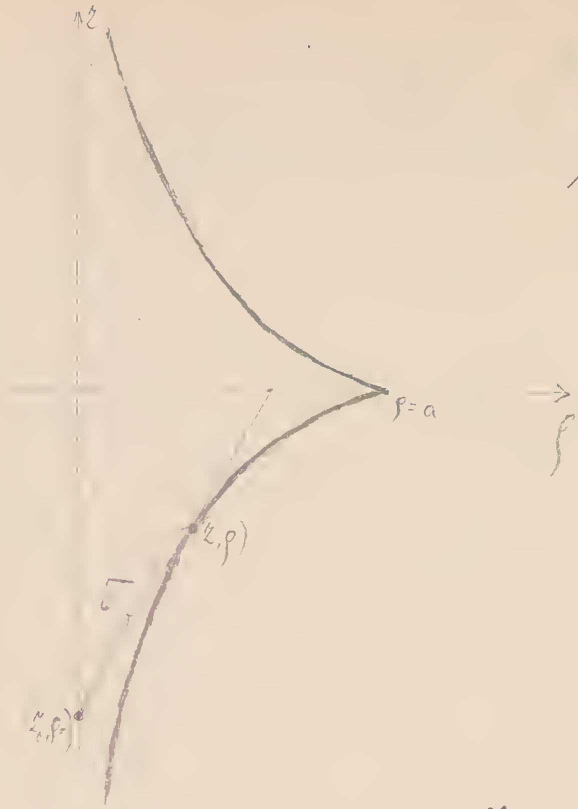
Sonst hat die Meridiankurven eine ähnliche cykloidenartige Gestalt, welche sich der Geraden $\rho=\sqrt{C+a^2}$ mit Spitzen aufsetzt, und die Gerade $\rho=\sqrt{C}$ berührt.

2.) Im Falle $C < 0$ haben wir eine Meridiancurve, welche auf den Geraden $\rho = +\sqrt{C+a^2}$ und auf den Geraden $\rho = -\sqrt{C+a^2}$ mit Spitzen aufsetzt, in der Weise, daß sie an der Stelle des Aufsetzens eine horizontale Tangente hat.



3.) $C = 0$.

Hier hat die Meridiancurve eine solche Gestalt, daß sie an der Stelle $z = 0$ mit dem Radius $\rho = a$ einsetzt und sich von hier aus gegen die z-Achse asymptotisch verhält.
An der Stelle der Spitze, $\rho = a$, hat die Curve wieder eine horizontale Tangente.



Die Gleichung der Fläche lautet hier

$$z = \int \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{a^2-\rho^2},$$

wo die Integration leicht auszuführen ist.
Es ist

$$z = a \cdot \log \frac{a+\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} - \sqrt{a^2-\rho^2}.$$

Wenn ich nun in einem Punkte z, ρ an die Kurve eine Tangente ziehe, so schneidet diese die Z-Achse im Punkte $(z_0, \rho_0 = 0)$. Die Gleichung der Tangente ist dann

$$\frac{z-z_0}{\rho-\rho_0} = \frac{dz}{d\rho},$$

wo, $\rho_0 = 0$, ist also

$$\frac{z-z_0}{\rho} = \frac{dz}{d\rho}.$$

Bezeichne ich weiter die Entfernung vom Punkte (z,ρ)

bis zum Punkte ($z_0, \rho_0 = 0$) mit T, so ist

$$T = \sqrt{(z-z_0)^2+\rho^2}$$

oder

$$T = \rho\sqrt{\left(\frac{z-z_0}{\rho}\right)^2 + 1}.$$

oder wenn ich einsetze

$$\frac{z-z_0}{\rho} = \frac{dz}{d\rho},$$

$$T = \rho\sqrt{\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2+1}$$

Es war aber

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 = \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2},$$

so dass wir erhalten

$$T = \rho\sqrt{\frac{a^2-\rho^2+\rho^2}{\rho^2}}$$

oder

$$\underline{T = a}$$

Unsere Meridiankurven hat die einfache Eigenschaft, dass das Stück, welches auf einer beliebigen Tangente zwischen Berührungspunkt und Z-Achse

liegt, die bekannte Länge a hat.
Man nennt eine Kurve, die diese Eigenschaft hat eine „Tractorie," der Name Tractorie ist zu erklären, daß sie von einem Faden (von der Länge a) befestigter Schwerpunkt diese Kurve beschreibt, wenn man das freie Ende entlang einer Geraden bewegt.

Die Rotationsfläche, die eine gemeine Tractorie als Meridiankurve hat, heisst „Pseudosphäre", sie ist die einfachste Rotationsfläche konstanten negativen Krümmungsmaßes.

Analytisch lassen sich unsere Formeln schematisch auf eine Kugel vom Radius a.i übertragen, die Geometrie ist also auf unseren Flächen dieselbe, wie auf einer Kugel vom Radius ai

Für die geodätischen Dreiecke auf unserer Fläche gelten also diejenigen Formeln, die sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, indem man den Radius gleich ai setzt.

Als Beispiel nehmen wir wieder den Satz vom Inhalt eines sphärischen Dreiecks, der, wie wir wissen,

$$J = r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

war.

Setzen wir hier

$$r = a.i$$

so haben wir als Inhalt eines geodätischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ auf der Pseudosphäre

$$J = a^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma).$$

Während also die geodätischen Dreiecke auf der reellen Kugelfläche einen positiven Exzess haben, haben die geodätischen Dreiecke auf dieser Pseudosphäre einen negativen Exzess.

Ebenso wie früher, lässt sich auch ein geodätisches Dreieck auf der Pseudosphäre ohne Änderung seiner Dimensionen beliebig verschieben oder verdrehen, im ganzen auf 3 fach unendlich viele Weisen.

Wir sind hier in der engsten Beziehung zur

„nicht euklidischen Geometrie" gelten.
Die Verhältnisse auf der Pseudosphäre erläutern nämlich die Sätze der nicht euklidischen Geometrie, indem die letzteren für die geradlinigen Dreiecke der Ebene genau solche Verhältnisse entwickelt, wie wir sie auf der Pseudosphäre vor uns haben.

Hiermit schließen wir das Kapitel über die partiellen Differentialgleichungen der Geometrie. Wir haben 2 partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt, nämlich

1) die der Minimalflächen
2) die der Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

Wir haben, wie es im Rahmen dieser Vorlesung geschehen mußte, keine allgemeine Theorie dieser Differentialgleichungen versucht, sondern uns begnügt, einzelne einfache Beispiele heranzuziehen, wobei wir besonders die Rotationsflächen betrachtet haben.

In einem Schlußkapitel wollen wir nun noch die

Differentialgleichungen der Variationsrechnung

kurz streifen.

Bei den Aufgaben der Variationsrechnung handelt es sich um Aufgaben der Maxima und Minima, allerdings nicht in dem uns bereits geläufigen Sinne, sondern die Fragestellung ist die folgende:

Es soll eine Funktion der unabhängigen Variabeln, $\varphi(x)$, gesucht werden, welche einen bestimmten Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum macht.

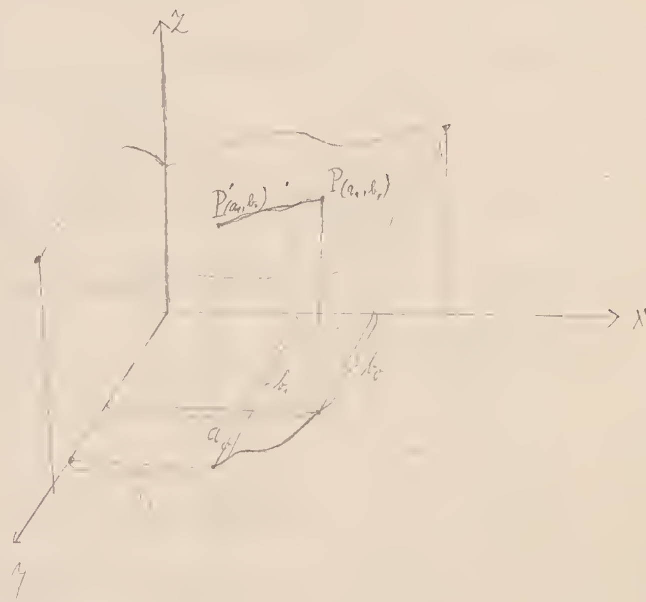
An zwei Beispielen wollen wir uns dies deutlich machen, und zwar an zwei Beispielen, die uns bereits geläufig sind, 1) den geodätischen Linien und 2.) den Minimalflächen.

1.) Die geodätischen Linien.

Wir haben bereits vermuthet, daß auf einer Fläche die geodätischen Linien zugleich die kürzesten

Linien sind. Diesen noch geschuldeten Beweis hierfür wollen wir jetzt nachholen. Wir stellen ganz allgemein die Frage:

„Gegeben ist eine Fläche $z = f(x, y)$ und auf derselben zwei Punkte (a_0, b_0) und (a_1, b_1). Diese beiden Punkte sollen durch eine kürzeste Linie verbunden werden."



Ein Bogenelement auf der Fläche ist bestimmt durch die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

und daß

$$dz = p \cdot dx + q \cdot dy \text{ ist,}$$

so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q \cdot dy)^2}$$

oder, wenn ich dx absondere

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + (y')^2 + (p + q \cdot y')^2}.$$

Wenn ich nun integriere, so ist

$$S = \int dx \cdot \sqrt{1 + (y')^2 + (p + q \cdot y')^2},$$

wo die Grenzen des Integrals so gewählt werden müssen, dass sie an der unteren Grenze ($x = a_0$, $y = b_0$), an der oberen Grenze ($x = a_1$, $y = b_1$) ist. Wir werden dies in Zukunft dadurch andeuten, dass wir unter das Integral schreiben „feste Grenzen".

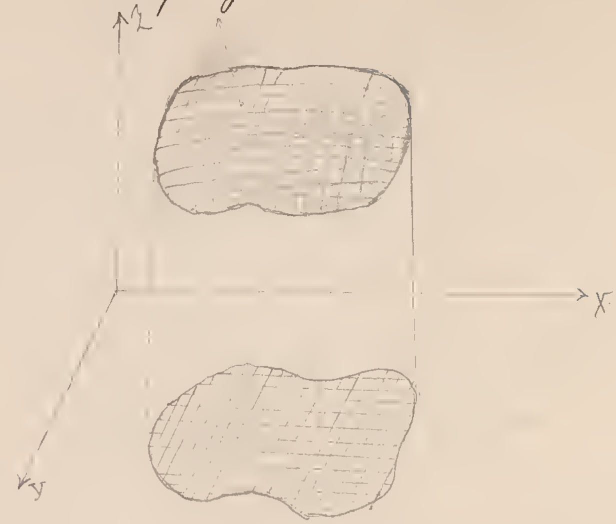
Die Aufgabe ist also:

y soll als Funktion von x so eingeführt werden, dass ein Integral

$$S = \int\limits_{\text{feste Grenzen}} \Omega(x, y, y')\, dx$$

so klein wird wie möglich.

2) Die Minimalflächen.



Es ist eine gewisse Contur vorgegeben und es soll nun in diese Contur eine Fläche [$z = f(x,y)$] so hineingespannt werden, dass sie einen möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt.

Eine Fläche, die in die vorgegebene Contur hineinpasst, ~~sie~~ ist darstellbar durch das Doppelintegral

$$\iint \frac{dx \cdot dy}{\cos\gamma}$$

(cfr. Klein: Differential u. Integralrechnung II. pg. 338-39.)

Es wird also darauf ankommen, die gesuchte Fläche so zu bestimmen, 1) dass sie durch die

Randkurven hindurchgeht und 2.) daß das Integral

$$\iint \frac{dx \cdot dy}{\cos\gamma}$$

möglichst klein wird.

Nun ist aber

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

so daß unsere Aufgabe nunmehr heißt:

„Es soll das Doppelintegral

$$\iint dx \cdot dy \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}$$

genommen zwischen festen Grenzen zu einem Minimum gemacht werden."

Nachdem wir so die beiden zu behandelnden Aufgaben in mathematische Form gebracht haben, wollen wir nun zusehen, wie wir die Behandlung weiter zu führen haben.

Wir werden hier einen Gedankengang benutzen, den zuerst Lagrange angegeben hat:

Wenn $f(x)$ ein zu einem Maximum oder

einem Minimum gemacht werden soll, so ist die notwendige Bedingung dafür

$$\frac{df}{dx} = 0.$$

Unsere zweite Aufgabe würde darin, die näheren Einzelheiten zu untersuchen, unter denen wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt.

Wenn also

$$\int \Omega(x, y, y') \cdot dx$$

ein Maximum oder Minimum wird, so ist

$$\int \left[\Omega(x, y+\delta y, y'+\delta y') - \Omega(x, y, y') \right] \cdot dx = 0.$$

Entwickeln ich Ω nach Potenzen von δy und $\delta y'$, so erhalte ich in erster Annäherung

$$\int \left[\Omega(x, y, y') + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \cdot \delta y' - \Omega(x, y, y') \right] \cdot dx = 0$$

oder

$$\int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \cdot \delta y' \right) \cdot dx = 0$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als „erste

"Variation" unseres Integrals und schreibt kurz

$$\delta\int\Omega\,dx = 0.$$

Wir können zusammenfassend sagen:
der erste Schritt von Lagrange ist der, daß er die erste Variation unseres Integrals

$$\delta\int\Omega(x,y,y')\,dx = 0$$

setzt.

Hieraus werden wir nun für y eine Differentialgleichung ableiten. Ist diese erfüllt und haben wir also eine Kurve, welche der Differentialgleichung genügt und Anfangs- und Endpunkt verbindet, dann ist näher zu untersuchen, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt.

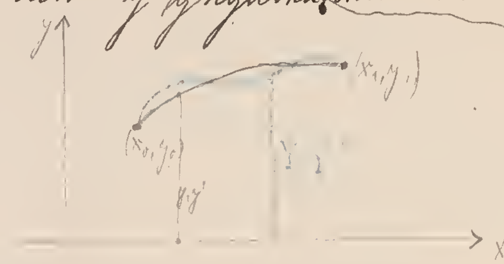
Bevor wir jedoch die Gleichung

$$\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial y'}\cdot\delta y'\right)dx = 0$$

weiter behandeln können, müssen wir noch folgende Überlegung machen, die uns Aufschluß gibt über die Beziehung des Variationszeichens δ,

und das Differentiationszeichen d.

Zwischen den Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) ist eine Kurve von der Ordinate y gegeben und der Richtung y'.



Eine Nachbarkurve hat die Ordinate $Y = y + \delta y$ und die Richtung $Y' = y' + \delta y'$.

Nun ist aber auch

$$Y' = \frac{dY}{dx} = y' + \frac{d\,\delta y}{dx}$$

und es folgt daraus

$$\delta y' = \frac{d\,\delta y}{dx}$$

~~Ist~~ Indem ich die Ordinate y um einen kleinen Betrag δy abändere, ist also das $\delta y'$ von selbst mit bestimmt.

Unsere erste Variation nimmt nunmehr die Gestalt an:

$$\int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \cdot \frac{d(\delta y)}{dx} \right) \cdot dx = 0,$$

feste Grenzen

das zerlegt werden kann in

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cdot \delta y \cdot dx + \int \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \cdot d(\delta y) = 0.$$

Auf diesen gemischten Integralterm wenden ich partielle Integration an, wodurch ich erhalten

$$\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y'}\cdot\delta y\right]^{\text{feste Grenzen}} - \int_{\text{feste Grenzen}} \frac{d\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y'}\right)}{dx}\cdot\delta y\cdot dx = 0$$

Da nun δy an den Grenzen verschwindet, so ist der erste Term gleich Null und wir erhalten

$$\int \frac{d\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y'}\right)}{dx}\cdot\delta y\cdot dx = 0$$

Unsere erste Variation nimmt nun die Gestalt an

$$\delta\int\Omega\,dx = \int dx\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y'}\right)\right]\delta y = 0$$

Da δy einen beliebigen Wert haben soll, im allgemeinen also von Null verschieden ist, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y'}\right) = 0$$

ist.

Diese Differentialgleichung ist die Euler=

diese Bedingung dafür, daß dieser Ausdruck ein Maximum oder Minimum wird.

Diese Bedingung ist zwar noch keineswegs als ausreichend nachzuweisen, der Kürze der Zeit halber kann dies aber nicht geschehen.

Wir wenden uns vielmehr jetzt wieder unseren Beispielen zu.

1/ Geodätische Linien.

Aus dem Integral

$$s=\int dx.\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2},$$

das zu einem Minimum gemacht werden soll, folgt wenn ich die erste Variation bilde

$$\delta\int dx\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}=0,$$

was uns zu der Gleichung führt.

$$\frac{(p+q)\cdot y'\cdot s.t}{\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{y'+(p+qy')\cdot q}{\sqrt{1+y'^2+(p+q\cdot y')^2}}\right]$$

oder wenn ich noch die letzte Differentiation ausführe

$$\frac{(p+q\cdot y')\cdot s\cdot t}{\sqrt{1+y'^2+(p+q\cdot y')^2}} = y''(p^2+q^2+1)$$

Dies ist aber dieselbe Gleichung, die wir bereits früher für die geodätischen Linien aufgestellt haben.× Wir haben also den Satz bewiesen:
„Die kürzesten Linien auf einer Fläche sind geodätische Linien."

2.) Minimalflächen.

Der Ansatz der Minimalflächen lautet nach Bilden der ersten Variation $\delta\iint \Omega(x,y,z,p,q)\,dx\cdot dy = 0$
oder nach Einsetzen für Ω

$$\delta\iint dx\cdot dy\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Da $\delta p = \frac{d(\delta z)}{dx}$ und $\delta q = \frac{d\,\delta z}{dy}$

× cfr. pg. 65.

so lautet der Lagrangesche Ansatz in diesem Falle

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial \Omega}{\partial p}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial \Omega}{\partial q}\right)}{\partial y} = 0.$$

Da

$$\Omega = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

ist, so ergeben sich die Differentialquotienten zu

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial q} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte nimmt der Lagrangesche Ansatz die Gestalt an

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0$$

Nach Ausführung der Differentiation ergibt sich

$$\frac{r + q^2 r - pqs}{\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)^3} + \frac{t + p^2 t - pqs}{\left(\sqrt{1+p^2+q^2}\right)^3} = 0$$

oder

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0$$

Wir hatten oben (cfr. pg. 349) dieselbe Gleichung für diejenigen Flächen gefunden, deren beide Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind, und haben so exakt bewiesen, ~~daß~~ was oben nur mitgetheilt werden konnte, daß diejenigen Flächen, deren beide Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind, zugleich Minimalflächen sind.

Der Zusammenhang mit der Variationsrechnung hat noch den formalen Vortheil, daß man eine Veränderliche einfach einführen kann, indem wir nämlich den Ausdruck unter dem Integralzeichen

(bei d. geodätischen Linien

$$\delta\int dx\sqrt{1+y'^2+(p+qy')^2}\ )$$

transformirt, der nur erste Differentialquotienten enthält, nicht die ~~diff~~ ursprüngliche Differentialgleichung

$$y''(1+p^2+q^2)=(py'+q)(r+2sy'+ty'^2)$$

mit ihren zweiten Differentialquotienten.

An dem Problem der geodätischen Linien auf Rotationsflächen wollen wir die gewaltige Vereinfachung, die sich durch unsere jetzige Betrachtungsweise ergiebt, zeigen.

In die zuletzt angegebene Differentialgleichung führten wir ρ und ω als Polarkoordinaten ein und fanden so die Gleichung in der Form

$$\rho(1+\chi'^2)\omega'' + [2(1+\chi'^2) - \rho\cdot\chi'\chi'']\cdot\omega' + \rho^2\omega'^3 = 0$$

(cfr: pg. 66–68.)

Für diese Gleichung fanden wir einen Multiplikator

$$\mu = \frac{1}{\omega'^3\cdot\rho^5}$$ (cfr: pg. 146–150

und konnten dann integrieren, so dass wir fanden

$$\frac{\rho^4\omega'^2}{1+\chi'^2+\rho^2\omega'^2} = K^2$$ (cfr. pg. 150–151)

dies führte uns dann zum Liouville-schen Satz. (pg. 152–154)

Dies alles lässt sich nun unter Zuhilfenahme der Variationsrechnung sehr viel einfacher aus-

suchen:

Aus der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

folgt nach Einführung der Polarkoordinaten ρ, ω

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

und da

$$dz = \chi' \cdot d\rho$$

ist, so lautet diese

$$ds^2 = \chi'^2 d\rho^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2$$

oder

$$ds = d\rho \sqrt{(1+\chi'^2) + \rho^2 \omega'^2}.$$

Also ist

$$S = \int d\rho \sqrt{(1+\chi'^2) + \rho^2 \omega'^2}.$$

Wenn dies Integral zu einem Minimum werden soll, so muß seine erste Variation gleich Null sein, also

$$\delta \int d\rho \sqrt{1+\chi'^2+\rho^2\omega'^2} = 0$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} + \frac{d\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \omega'}\right)}{d\rho} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\omega} = 0 \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\omega'} = \frac{\rho^2\omega'}{\sqrt{1+\chi'^2+\rho^2\omega'^2}},$$

so daß unsere Gleichung lautet

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\rho^2\omega'}{\sqrt{1+\chi'^2+\rho^2\omega'^2}}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\rho^2\omega'}{\sqrt{1+\chi'^2+\rho^2\omega'^2}} = K$$

und wenn ich quadriere, so erhalte ich die Gleichung in der früheren Gestalt

$$\frac{\rho^4 \cdot \omega'^2}{1+\chi'^2+\rho^2\omega'^2} = K^2.$$

Die Methode der Variationsrechnung bewährt sich im vorliegenden Falle in der Tat dadurch, daß sie die Gleichung der geodätischen Linien auf Rotationsflächen ohne alle Rechnung in einer Form ergiebt, in der das Liouvillesche Integral zu erkennen ist.

Wir wollen uns nun zum Schluß noch kurz mit der „inneren Geometrie der Flächen" beschäftigen und zwar betrachten wir einen Gedankengang, der zuerst von Gauss angegeben wurde in der 1827 erschienenen Schrift: „Disquisitiones circa superficies curvas".

Gauss führt im Raume zwei unabhängige Koordinaten ein u, v, so daß z. B. ist

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v).$$

und er setzt dann das Bogenelement an. in der Gleichung

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

wo E, F, G ganz beliebige Funktionen von u und v sind, wo nur vorausgesetzt wird, daß sie den Differentialausdruck positiv machen.

Der Gesichtspunkt bei Gauss ist dann der, zur Beurteilung der inneren Geometrie der Flächen diesen Ausdruck

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

an die Spitze zu stellen, ohne zu fragen, wie

daß X, Y, Z mit den u und v zusammenhängt. Wenn ich aber das hineinbringe, so bekomme ich die Gleichung einer Curve auf meiner Fläche.

$$\int ds = \int du \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}$$

feste Grenzen.

wo durch den Zusatz „feste Grenzen" ausgedrückt ist, daß die Curve durch zwei feste Punkte gehen soll.

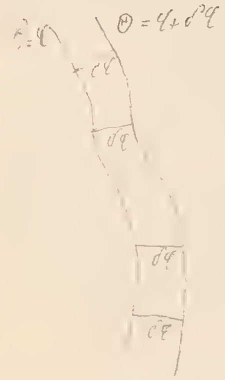
Soll meine Curve eine geodätische Linie sein, so muß die erste Variation unseres Integrals verschwinden

$$\delta \int du \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} = 0$$

Diese Lehre von den geodätischen Linien gehört in die innere Geometrie der Flächen hinein. Wir werden jetzt einen Zusammenhang kennen lernen zwischen dem Problem der geodätischen Linien und einer gewissen speziellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Bisher hatten wir als Gleichung der geodätischen Linien eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen u und v aufgestellt. Jetzt wollen wir aufsuchen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u, v und einer gewissen Funktion $\Theta(u,v)$, die wir als Normalfunktion bezeichnen und ~~die wir~~ folgendermaßen definieren:

Wir nennen $\Theta(u,v)$ eine Normalfunktion der



Fläche, wenn die Niveaukurven $\Theta = C$ und $\Theta = C + \delta C$, überall den gleichen orthogonalen Abstand δC besitzen.

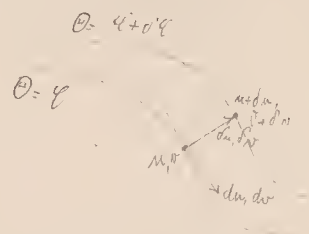
Algemein. Transvers

Wir werden mit dem Aufstellen dieser partiellen Differentialgleichung den Anschluß gewinnen an die Hamilton-Jacobische Theorie in der Mechanik.

Um die Gleichung, die Gauss an die Spitze seiner Untersuchungen stellt

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

zu studieren, zeichnen wir uns die beiden Curven $\Theta = C$ und $\Theta = C + \delta C$, und betrachten die Breite des von beiden eingeschlossenen Intervalls.



Die Fortschreitungsrichtung (du, dv) in Richtung der Tangente ~~sind~~ ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \cdot dv = 0$$

oder

$$du : dv = \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) : \frac{\partial \Theta}{\partial u}.$$

Die Fortschreitungsrichtung $\delta u, \delta v$ in Richtung der Normale ist dann gegeben durch die Gleichung

$$\delta u \cdot du + \delta v \cdot dv = 0$$

$$du : dv = (-\delta v) : \delta u$$

oder

$$\delta u : \delta v = \frac{\partial \Theta}{\partial u} : \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

Es ist nun weiter folgendes der Fall:
damit 2 Fortschreitungsrichtungen (du, dv) und $(\delta u, \delta v)$ auf einander senkrecht stehen, muss

der Ausdruck

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u \cdot dv) + G\,dv\,\delta v = 0$$

sein, wie aus dem Ansatze für ds^2 folgt.
[Dies kann hier nicht bewiesen, sondern nur mitgeteilt werden.]

Diese Gleichung kann ich auch schreiben

$$(E\,\delta u + F\,\delta v) \cdot du + (F\,\delta u + G\,\delta v) \cdot dv = 0.$$

Oben hatten wir aber bereits die Gleichung aufgestellt

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \cdot dv = 0.$$

Unter Einführung des Proportionalitätsfaktors μ folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$E\,\delta u + F\,\delta v = \mu \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u}$$

$$F\,\delta u + G\,\delta v = \mu\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

Für die beiden Kurven gelten die Gleichungen

$$\Theta(u, v) = C$$

$$\Theta(u + \delta u,\ v + \delta v) = C + \delta C.$$

Wenn ich diese letzte Gleichung nach Taylor entwickle, so erhalte ich unter Fortlassung von

Gliedern höherer Ordnung

$$\Theta(u,v) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\cdot \delta u + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\cdot \delta v = \mathfrak{C} + \delta \mathfrak{C}$$

oder

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u}\cdot \delta u + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\cdot \delta v = \delta \mathfrak{C}$$

Um den Proportionalitätsfaktor μ zu bestimmen, suche ich aus den beiden ihn enthaltenden Gleichungen zunächst δu und δv durch μ auszudrücken, es ergibt sich so

$$\delta u = \frac{\mu \begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial u} & \mathfrak{F} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial v} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}}$$

$$\delta v = \frac{\mu \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ \mathfrak{F} & \frac{\partial \Theta}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}}$$

Setze ich diese in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\mu \cdot \left[\frac{\partial \Theta}{\partial u} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial u} & \mathfrak{F} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial v} & \mathfrak{G} \end{vmatrix} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ \mathfrak{F} & \frac{\partial \Theta}{\partial v} \end{vmatrix} \right] = \delta \mathfrak{C} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}$$

$$\mu = -\frac{\begin{vmatrix} E, F \\ F, G \end{vmatrix} \cdot \delta C}{\begin{vmatrix} E\,, & F\,, & \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ F\,, & G\,, & \frac{\partial \Theta}{\partial v} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial u}\,, & \frac{\partial \Theta}{\partial v}\,, & 0 \end{vmatrix}}$$

Jetzt kann ich leicht die Breite δs des von den beiden Kurven $\Theta = C$ und $\Theta = C + \delta C$ gebildeten Kanals berechnen. Es ist

$$\delta s^2 = (E\,\delta u + F\,\delta v)\cdot \delta u + (F\,\delta u + G\,\delta v)\cdot \delta v.$$

oder

$$\delta s^2 = \mu^2 \left[\frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial u} & F \\ \frac{\partial \Theta}{\partial v} & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ F & \frac{\partial \Theta}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} \right]$$

Da aber der Klammerausdruck gleich $\frac{\delta C}{\mu}$ ist, so ist

$$\delta s^2 = \mu \cdot \delta C.$$

oder

$$\delta s^2 = -\frac{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E, & F, & \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ F, & G, & \frac{\partial \Theta}{\partial v} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial u}, & \frac{\partial \Theta}{\partial v}, & 0 \end{vmatrix}} \cdot \delta C^2$$

Da aber nach unseren Voraussetzungen über die Normalfunktion die Breite des Kanals

$$\delta s = \delta \sigma$$

sein sollte, so muss der Determinantenfaktor gleich 1 sein. Es ist also

$$- \begin{vmatrix} E, & F, & \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ F, & G, & \frac{\partial \Theta}{\partial v} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial u}, & \frac{\partial \Theta}{\partial v}, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E, F \\ F, G \end{vmatrix}$$

oder

$$E\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2$$

Um ein einfachstes Beispiel einer Normalfunktion, setzen wir die Gaussschen Variabeln direkt gleich den Cartesischen Coordinaten. Die Gleichung eines Linienelements in der Ebene lautet

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

und in dem Gaussschen Ansatze

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2,$$

wir finden also

$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$

der Ansatz zur Bestimmung der Normalfunktion lautet nach Einführung dieser Werte

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 = 1$$

Eine Partikularlösung dieser Gleichung ist

$$\Theta = (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y = c,$$

eine Gleichung, die den Abstand eines Punktes von einer Geraden bezeichnet.

Das einfachste Beispiel einer Normalfunktion in der (X,Y) Ebene ist der Ausdruck

$$(\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y = c.$$

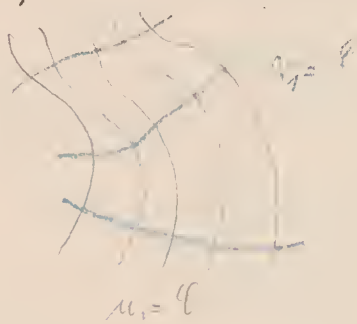
Wir sehen hier auch schon den Zusammenhang mit den geodätischen Linien. Um diesen nun voll zu erkennen stellen wir folgenden Satz auf:

<u>Hauptsatz</u>:

Die orthogonalen Trajektorien unserer Kurvenschar $\Theta = c$ <u>sind</u> geodätische Linien.

Beweis:

Ich führe neue Koordinaten (u_1, v_1) in der Weise ein, dass $u_1 = \Theta(u, v) = C$ die Kurvenschar der Normalschnitten bezeichnet, $v_1 = C$ sei die Kurvenschar der orthogonalen Trajektorien.



Es muss dann die Gleichung von Gauss bestehen

$$ds^2 = E_1 \cdot du_1^2 + 2 F_1 du_1 \cdot dv_1 + G_1 \cdot dv_1^2$$

Da u_1 und v_1 aufeinander senkrecht stehen sollen, so ist

$$du_1 \cdot dv_1 \equiv 0,$$

es muss also der zweite Term identisch verschwinden.

Wenn $v_1 = C$ ist, d. h. auf den rechtwinkligen Trajektorien, so ist also

$$ds^2 = du_1^2.$$

Es muss also $E_1 = 1$ sein

Unsere Gleichung für das Bogenelement reduziert sich also auf

$$ds^2 = du_1^2 + G_1\, dv_1^2$$

oder wenn ich integriere

$$S = \int du_1 \sqrt{1+G_1 \cdot v_1'^2}$$

Wenn die hierdurch bestimmte Kurve eine geodätische Linie sein soll, so muss die erste Variation dieses Integrals verschwinden, d. h.

$$\delta \int du_1 \sqrt{1+G_1 \cdot v_1'^2} = 0.$$

Hieraus folgt aber die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \sqrt{1+G_1 \cdot v_1'^2}}{\partial v_1} - \frac{d}{du_1}\left(\frac{\partial \sqrt{1+G_1 \cdot v_1'^2}}{\partial v_1'}\right) = 0$$

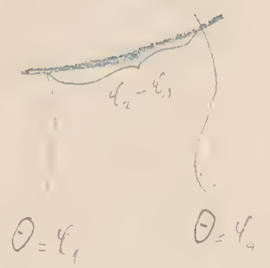
oder durch Ausführung der Differentiation

$$\frac{\frac{\partial G_1}{\partial v_1} \cdot v_1'^2}{2\sqrt{1+G_1\, v_1'^2}} - \frac{d}{du_1}\left(\frac{G_1\, v_1'}{\sqrt{1+G_1 v_1'^2}}\right) = 0$$

Dieser Differentialgleichung sieht man aber ohne weiteres an, dass sie erfüllt ist.

wenn ich v_1 = Const. setze, der Beweis ist damit geliefert.

Die Länge einer vorherge-nannten geodätischen Linie ist schon unmittelbar angeb-bar, ein Stück, welches von $\Theta = c_1$ bis $\Theta = c_2$ hinreicht, hat die Länge $c_2 - c_1$.



Außerdem haben wir noch folgendes Resultat ge-wonnen:

„Wenn ich das Problem der geodätischen Linien erledigt habe, so kann ich ohne Quadratur die allgemeine Lösung der partiellen Differential-gleichung der Normalfunktion finden."

Ich gehe aus von einer beliebigen Kurve $F(u,v) = 0$, lasse dann von dieser Kurve aus rechtwinklig geodätische Linien aus-laufen und trage auf allen ein gleiches Stück ab und verbinde die Punkte durch eine Kur-ve.

Indem ich dies beliebig oft wiederhole, bekomme ich ein ganzes Kurvensystem
$F(u, v, C) = 0$.
Wenn ich diese letzte Gleichung nach C auflöse, so muss sich

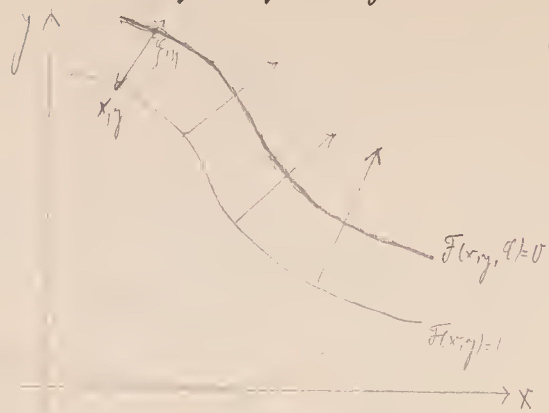
$$\Theta(u, v) = C$$

ergeben.

Es ist also ohne Quadratur die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung der Normalfunktion zu finden.

Betrachten wir ein Beispiel, indem wir uns auf die Ebene beschränken.
In der (X, Y) Ebene zeichnen wir eine Kurve $F(x, y) = 0$ und ziehen in einer beliebigen Anzahl Punkten die Normalen der Kurve deren Richtungskosinus gegeben sind durch

die Gleichungen



$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

Auf diesen Normalen trage ich ein Stück ℓ ab und verbinde die Punkte durch eine neue Kurve. Einem Punkte (x,y) auf der gegebenen Kurve entspreche ein Punkt (ξ,η) auf der neu gefundenen Kurve. Dann ist

$$\xi = x + \ell \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$ und

$$\eta = y + \ell \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\ell = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

Fassen wir nun z. B. x, y, ℓ als Funktionen von ξ und η auf, so sind wir durch Auflösung unserer 3 Gleichungen im Stande, zu einem Punkte (ξ,η) die Fußpunkte x, y der Nor-

malen und die Länge l der Normalen zu berechnen.

Insbesondere ist $\Theta(\xi, \eta) = l$ die gesuchte Normalfunktion.

Die Umkehrung dieses oben betrachteten Theorems würde heißen:

„Wenn ich Normalfunktionen in hinreichender Zahl kenne, dann kann ich das Problem der geodätischen Linien ohne weitere Integration erledigen."

Wir kennen eine Funktion

$$\Theta(u, v, \alpha) = l,$$

d. h. eine einfach unendliche Schar von Parallelkurven und unsere Behauptung ist nun die folgende:

„Die Kurven

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \beta$$

sind geodätische Linien und zwar stehen sie senkrecht zu den Kurven $\Theta = l$."

[Da unser Ansatz zwei willkürliche Konstanten enthält, so haben wir zugleich alle überhaupt möglichen geodätischen Linien.]

Beweis:

Ich habe nur zu zeigen, daß die Curven $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\beta$ senkrecht stehen auf den Curven $\Theta=C$, – denn alsdann aus dem Hauptsatze folgt, daß die Curven

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\beta$$

wirklich geodätische Linien sind.

Die Fortschreitungsrichtung (du, dv) auf der Tangente der Curve $\Theta=C$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial\Theta}{\partial v}\cdot dv=0.$$

Ebenso ist die Fortschreitungsrichtung auf der Tangente der Curve $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\beta$ gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial u}\cdot\delta u+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial v}\cdot\delta v=0.$$

Wenn diese beiden Fortschreitungsrichtungen (du, dv) und $(\delta u, \delta v)$ aufeinander senkrecht stehen sollen, so muß die Gleichung

$$E\cdot du\,\delta u+F(du\,\delta v+\delta u\cdot dv)+G\cdot dv\,\delta v=0$$

erfüllt sein.

Durch Einsetzen der Werte für die Differentiale nimmt diese Gleichung die Gestalt an

$$E\frac{\partial\Theta}{\partial v}\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial v} - F\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial u} + \frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial v}\right) + G\frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial u} = 0$$

Θ befriedigt in jedem Falle die Gleichung der Normalfunktion

$$E\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2,$$

was auch die Konstante α für einen Wert haben mag. Es kommt also etwas richtiges heraus, wenn ich sie nach α differenziere.

Wenn ich aber nach α differenziere, so ergiebt sich gerade die obige Gleichung:

$$E\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial v} - F\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial u} + \frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial v}\right) + G\frac{\partial\Theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\cdot\partial u} = 0.$$

Diese Gleichung ist also richtig und damit unser Beweis durchgeführt.

Beispiel:

Bei einem Beispiel wollen wir uns wieder auf die Ebene beschränken wo wir bereits eine Normalfunktion kennen

$$\Theta(x, y\,\alpha) = x \cdot \cos\alpha - y \sin\alpha$$

Um die geodätischen Linien zu finden, muß ich diese Gleichung nach α differenzieren, also

$$\beta = \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = -x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha$$

In der Tat stehen beiden durch die Gleichungen bestimmten Geraden auf einander senkrecht. Unsere allgemeinen Theorie bewährt sich also in diesem speziellen Falle.

Den geometrischen Gedanken der letzten Untersuchungen, wollen wir noch etwas deutlicher hervorheben.

Wenn ich in der gegebenen Kurvenschar

$$\Theta(u, v; \alpha) = C$$

α ein wenig um $d\alpha$ verändere, so erhalte ich eine neue Kurvenschar

$$\Theta(u, v; \alpha + d\alpha) = C + dC,$$

wo ich

$$dC = \beta \cdot d\alpha$$

setze.

Es ist dann

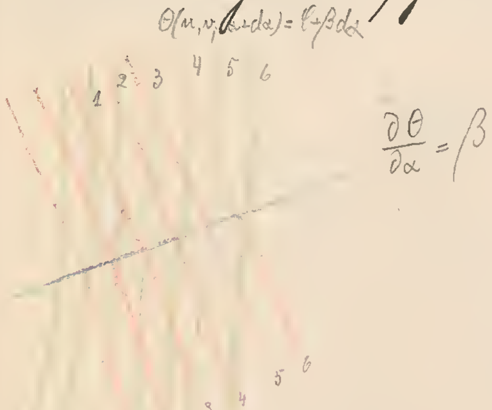
$$\Theta(u,v) + d\alpha \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = C + \beta . d\alpha$$

oder in der Tat

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \beta .$$

Die Kurven $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \beta$ ist der geometrische Ort der Schnittpunkte (der einzelnen Kurven) der Kurvenschar $\Theta(u,v;\alpha)=C$ mit der benachbarten Kurven der benachbarten Kurvenschar $\Theta(u,v;\alpha+d\alpha) = C+\beta . d\alpha$.

Wir kommen so schließlich zu folgender Definition der geodätischen Linien:



„Die geodätischen Linien werden erzeugt durch den Schnitt korrespondierender Kurven zweier unendlich wenig verschiedener Parallelkurvensysteme."

Das klassische Beispiel für diese Art der Erzeugung der geodätischen Linien ist die Jacobische Bestimmung der geodätischen Linien

auf dem dreiachsigen Ellipsoid.

Unsere letzten Betrachtungen haben wieder die engste Beziehung zur Mechanik.

An die Stelle der geodätischen Linien treten dort die Bahnkurven des betrachteten bewegten Systems allgemein.

Die Rolle der Gaußschen Variabeln u, v spielen die unabhängigen Koordinaten von Lagrange q.

Die Variationsrechnung, bei der ~~wo~~ wir besonders das Verschwinden der ersten Variation

$$\delta\int ds = 0,$$

betrachtet haben, spielt in dies Gebiet hinein bei Einführung des Prinzips der kleinsten Wirkung [Hamiltonsches Prinzip].

Die Lehre von der Normalfunktion endlich hängt aufs engste zusammen mit der Hamilton-Jacobischen Theorie in der Mechanik.

Inhalt